УДК 517.977

ПУТЕВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

А.Н. Канатников
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1
E-mail: mathmod@bmstu.ru

Ключевые слова: летательный аппарат, путевая стабилизация, путевые координаты, обратная связь.

Аннотация: Рассмотрена задача путевой (орбитальной) стабилизации в пространстве для летательного аппарата, определяемого шестимерной моделью. Для построения управления использованы специальные путевые координаты, для которых рассмотрены два подхода: метод проекции на плоскость и метод сопутствующего базиса с параллельным переносом. Ранее было построено решение задачи путевой стабилизации в случае постоянной скорости летательного аппарата. В данной работе такое управление построено в случае переменной скорости.

1. Введение

Под задачей путевой (орбитальной) стабилизации мы понимаем вывод объекта на заданную кривую и обеспечение движения объекта вдоль этой кривой. Скорость движения объекта вдоль кривой задается, но не является целью стабилизации движения. Задача путевой стабилизации (path following) отличается от задачи отслеживания траектории (trajectory tracking), в которой целью управления является движение по заданной кривой с предписанным временным графиком. Отсутствие стабилизации по скорости движения приводит к более слабым требованиям по управлению, что может привести к повышению качества управления, особенно при наличии фазовых ограничений и ограничений на управление [1].

Задача путевой стабилизации в применении к механическим системам активно исследовалась (в частности, известны работы по колесным наземным роботам, подводным роботам, летательным аппаратам). Задача решалась как в двумерном, так и трехмерном случаях. Различия в основном связаны с используемой моделью объекта и способом описания отклонения объекта от заданной кривой. Распространенный подход — введение целевой точки на заданной кривой и рассмотрение отклонения характерной точки объекта от целевой точки. При таком подходе габариты объекта не являются существенными, а сам объект естественно рассматривать как материальную точку. В качестве целевой точки мы будем рассматривать ближайшую к объекту точку кривой.

Еще один мотив — рассматривать параметры отклонения объекта от кривой как специальные координаты положения объекта, тогда целью управления будет стабилизация в нуле таких координат. Они привязаны к заданному пути следования объекта, и их естественно назвать путевыми. Путевые координаты очень естественны на плоскости [2,3], в пространстве их определить труднее. В работе [4] предложены два варианта путевых координат в пространстве и показано, как с помощью таких координат можно решить задачу путевой стабилизации для шестимерной модели летательного аппарата. Однако в этой работе все результаты получены в предположении, что скорость летательного аппарата по величине постоянна. Это ограничение несущественно в кинематической постановке задачи, в которой управлениями являются углы ориентации скорости. Однако в случае шестимерной модели управлениями являются перегрузки, и изменение модуля скорости становится существенным фактором в управлении. Этот фактор в двумерном случае можно изящно учесть с помощью замены независимой переменной (времени) [2].

В данной работе мы рассмотрим задачу путевой стабилизации для шестимерной модели в случае переменной скорости.

2. Модель объекта и путевые координаты

Летательный аппарат (ЛА) будем рассматривать как материальную точку. В этом случае движение удобно записывать, используя угловые координаты траекторной системы [5]:

$$\begin{cases} \dot L = V\cos\theta\,\cos\psi, & \dot V = (v_1-\sin\theta)g,\\ \dot H = V\sin\theta, & \dot\theta = \frac{(v_2-\cos\theta)g}{V},\\ \dot Z = -V\cos\theta\,\sin\psi, & \dot\psi = -\frac{v_3 g}{V\cos\theta}. \end{cases} \tag{1}$$

где L — продольная дальность; H — высота: Z — боковое отклонение, отсчитываемое вправо (базис Z, L, H правый); V — модуль вектора скорости; θ — угол наклона вектора скорости; ψ — угол курса, отсчитываемый против часовой стрелки; g — ускорение свободного падения; v_1, v_2, v_3 — управления, которые связаны продольной и поперечной перегрузками n_x, n_y и углом γ крена вектора перегрузки формулами $v_1 = n_x$, $v_2 = n_y\cos\gamma$, $v_3 = n_y\sin\gamma$.

В [4] предложены два метода введения путевых координат. Первый — метод проекции на плоскость — является естественным обобщением двумерного случая.

Пусть Γ: $\boldsymbol{\zeta}_*(s) = (z_*(s),\, l_*(s),\, h_*(s))$ — кривая, описывающая заданный путь в пространстве (здесь s — натуральный параметр). Рассмотрим ее проекцию Γ_0: $\boldsymbol{\xi}_*(s) = (z_*(s), l_*(s))$ на плоскость (Z, L) (далее называется горизонтальной). Рассмотрим проекцию (Z, L) положения $\boldsymbol{r} = (Z, L, H)$ ЛА в пространстве на горизонтальную плоскость. На этой плоскости введем путевые координаты, описывающие положение точки $(Z,\, L)$ относительно плоской кривой $\boldsymbol{\xi}_*(s)$: переменную s — значение натурального параметра точки S_0 на Γ_0, ближайшей к точке $(Z,\, L)$; d — расстояние от точки $(Z,\, L)$ до кривой Γ_0; $V\cos\theta$ — модуль проекции вектора скорости на горизонтальную плоскость; β — угол между касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ к кривой Γ_0 в точке $\boldsymbol{\xi}_*(s)$ и проекцией вектора скорости на горизонтальную плоскость. Чтобы полностью описать положение объекта добавим величину $h = H - h_*(s)$ — вертикальное отклонение объекта от предписанного пути и величину θ — угол наклона вектора скорости объекта. В указанных координатах система (1) примет следующий вид:

$$
(2)\qquad \begin{cases} \dot{s} = \frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd}, & \dot{V} = -g\sin\theta + gv_1, \\ \dot{d} = V\cos\theta\,\sin\beta, & \dot{\beta} = -\frac{Vk\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd} - \frac{v_3 g}{V\cos\theta}, \\ \dot{h} = V\sin\theta - h_*'(s)\frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd}, & \dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{V} + \frac{gv_2}{V}, \end{cases}
$$

где k — кривизна кривой $\boldsymbol{\xi}_*(s)$.

Второй метод введения путевых координат основан на использовании специального сопутствующего базиса — базиса с параллельным переносом [4]. Этот базис строится в целевой точке $\boldsymbol{\zeta}_*(s)$, соответствующей натуральному параметру s, он содержит касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ к кривой и два нормальных вектора $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Динамика сопутствующего базиса с параллельным переносом описывается уравнениями

$$
(3)\qquad \boldsymbol{\tau}'(s) = k_1\boldsymbol{n}_1 + k_2\boldsymbol{n}_2, \quad \boldsymbol{n}_1'(s) = -k_1\boldsymbol{\tau}(s), \quad \boldsymbol{n}_2'(s) = -k_2\boldsymbol{\tau}(s).
$$

Динамика одного из нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ определяется дифференциальным уравнением $\boldsymbol{n}_1'(s) = (\boldsymbol{\zeta}'(s)\times\boldsymbol{\zeta}''(s))\times\boldsymbol{n}_1(s)$. Это уравнение позволяет построить сопутствующий базис с параллельным переносом в любой точке кривой путем интегрирования этого дифференциального уравнения. Параметры k_1, k_2 (кривизны) могут быть найдены с помощью уравнений (3) и скалярного произведения, например по следующим формулам:

$$
k_1 = (\boldsymbol{\tau}'(s),\ \boldsymbol{n}_1), \quad k_2 = (\boldsymbol{\tau}'(s),\ \boldsymbol{n}_2).
$$

Путевыми координатами можно выбрать параметр s целевой точки, координаты d_1, d_2 вектора отклонения ЛА от целевой точки, их производные по времени $\dot{d}_1$, $\dot{d}_2$ и модуль вектора скорости V. В этих координатах уравнения движения имеют следующий вид:

$$
(4)\qquad \begin{cases} \dot{s} = \frac{\sqrt{V^2-\dot{d}_1^2-\dot{d}_2^2}}{1-k_1d_1-k_2d_2}, \\ \ddot{d}_1 = -\frac{(V^2-\dot{d}_1^2-\dot{d}_2^2)k_1}{1-k_1d_1-k_2d_2} + (\boldsymbol{n}_1,\ \ddot{\boldsymbol{r}}), \\ \ddot{d}_2 = -\frac{(V^2-\dot{d}_1^2-\dot{d}_2^2)k_2}{1-k_1d_1-k_2d_2} + (\boldsymbol{n}_2,\ \ddot{\boldsymbol{r}}). \end{cases}
$$

3. Построение стабилизирующего управления

Системы (2) и (4) аффинные. В них переменную V следует трактовать как известную функцию времени $V(t)$ (константу в частном случае), которая реализуется с помощью управления v_1 и не зависит от значений других управлений.

Задача путевой стабилизации сводится к стабилизации в нуле четырех фазовых переменных (d, h, $\dot{d}$, $\dot{h}$ в методе проекции на плоскость, d_1, d_2, $\dot{d}_1$, $\dot{d}_2$ в случае метода сопутствующего базиса). Такое управление можно строить путем приведения к квазиканоническому виду, или нормальной форме при соответствующем выборе выхода.

Для системы (2) в качестве выхода выбираем $\boldsymbol{y} = (d,\ h)^T$, управление обозначим $\boldsymbol{v} = (v_2,\ v_3)^T$. Продифференцировав второе и третье уравнения системы, придем к представлению

$$
(5)\qquad \begin{cases} \ddot{\boldsymbol{y}} = P + V'(t)dP + Q\boldsymbol{v}, \\ \dot{s} = \frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd}, \end{cases}
$$

где

$$P = g\cos\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\,\sin\beta - \frac{V^2 k\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd} \\ -\cos\theta - h_*'(s)\frac{\sin\theta\,\cos\beta}{1-kd} - \frac{V^2 k\cos\theta\,\cos\beta\,\sin\beta}{(1-kd)^2} - R_1 \end{pmatrix},$$

$$dP = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\sin\beta \\ \sin\theta - h_*'(s)\frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd} \end{pmatrix},$$

$$Q = g\begin{pmatrix} -\sin\theta\,\sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\theta + h_*'(s)\frac{\sin\theta\,\cos\beta}{1-kd} & -h_*'(s)\frac{\sin\beta}{1-kd} \end{pmatrix},$$

$$R_1 = h_*''(s)\frac{V^2\cos^2\theta\,\cos^2\beta}{(1-kd)^2} + \\ + h_*'(s)\frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{(1-kd)^2}\Big(k'(s)d\frac{V\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd} + Vk\cos\theta\,\sin\beta\Big).$$

Представление (5) позволяет стандартным образом найти управление $\boldsymbol{v}$, стабилизирующее в нуле переменные d, h, $\dot{d}$, $\dot{h}$ и тем самым решить задачу путевой стабилизации:

$$\boldsymbol{v} = -Q^{-1}(P + V'(t)dP + \lambda_1\dot{\boldsymbol{y}} + \lambda_2\boldsymbol{y}), \tag{6}$$

где числовые параметры λ_1 и λ_2 выбраны так, что многочлен $x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$ имеет отрицательные корни.

Управление в системе (4) строится аналогичным образом. Вектор $\ddot{\boldsymbol{r}}$ можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = P_0 + V'(t)dP_0 + Q_0\boldsymbol{v},$$

где

$$P_0 = g\cos\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\psi \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta\,\sin\psi \end{pmatrix}, \quad dP_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\psi \\ \sin\theta \\ -\cos\theta\,\sin\psi \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\,\cos\psi & \sin\psi \\ \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\,\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Это представление позволяет записать систему (4) в виде

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{y}} = P + Q\boldsymbol{v}, \\ \dot{s} = \frac{\sqrt{V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2}}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2}, \end{cases} \tag{7}$$

где в данном случае $\boldsymbol{y} = (d_1,\ d_2)^T$; $Q = (\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)^T Q_0$;

$$P = -\frac{(V^2 - \dot{d}_1^2 - \dot{d}_2^2)k_1}{1 - k_1 d_1 - k_2 d_2}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)^T(P_0 + V'(t)dP_0).$$

Представление (7) позволяет построить управление, стабилизирующее в нуле переменные d_1, d_2, $\dot{d}_1$, $\dot{d}_2$, согласно формуле (6), т.е. решить задачу путевой стабилизации с использованием сопутствующего базиса с параллельным переносом.

4. Заключение

В работе показано, как с использованием путевых координат можно решить задачу путевой стабилизации. Ранее были предложены два варианта путевых координат: первый основан на использовании проекции на плоскость и плоских путевых координат, второй — на введении специального сопутствующего базиса. Ранее этот подход был предложен в случае постоянной скорости летательного аппарата, а в данной работе показано, как этот подход работает в случае переменной скорости.

Выкладки показывают, что при переменной скорости в выражениях для управления появляются дополнительные слагаемые, пропорциональные производной $V'(t)$. Профиль скорости $V(t)$ обеспечивается управлением v_1, совпадающим с продольной перегрузкой. Поэтому итоговое управление $(v_2,\ v_3)^T$ будет включать в себя и управление v_1. Однако следует заметить, что в системах (2) и (4) уравнения для производных выхода (d, h в первом случае и d_1, d_2 во втором) содержать профиль $V(t)$ как мультипликативный множитель. От такого множителя можно избавиться в уравнении с помощью замены независимой переменной t, например переменной ν согласно уравнению $\dot{\nu} = V(t)$, что является корректным при $V(t) \geqslant c > 0$. Тогда, например, в системе (2) взамен второго и третьего уравнений получим

$$d'_\nu = \cos\theta\,\sin\beta, \quad h'_\nu = \sin\theta - h'_*(s)\frac{\cos\theta\,\cos\beta}{1-kd}.$$

Выбрав в качестве канонических переменных d, h, d_ν, h'_ν и повторив приведенные выкладки, получим управление, не содержащее функции $V'(t)$. Аналогичная ситуация и в случае путевых координат на основе сопутствующего базиса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-07-00269а и 19-07-00817а).

Список литературы

1. Aguiar A.P., Hespanha J.P., Kokotović P.V. Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems // Automatica. 2008, Vol. 44, No. 3. P. 598-610.
2. Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Стабилизация движения колесного робота вдоль криволинейной траектории, проложенной по неровной поверхности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 167-176.
3. Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 7. С. 211-222.
4. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 10. С. 5-19.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51-64.