

МАКСИМИЗАЦИЯ ДАЛЬНОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КРЫЛОВА-ЧЕРНОУСЬКО

В.Е. Семашкин

АО «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А.Г. Шипунова»

Россия, 300001, Тула, ул. Щегловская засека ул., 59

E-mail: kbkedr@tula.net (с пометкой в теме «для Семашкина В.Е.»)

Ключевые слова: летательный аппарат, дальность, управляемый полет, оптимальное управление, двухточечная краевая задача, метод Крылова-Черноусько, сходимость.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления летательным аппаратом (ЛА) для обеспечения его полета на максимальную дальность. С помощью принципа максимума задача сводится к двухточечной краевой задаче, решаемой итерационно методом Крылова-Черноусько. Приводятся тестовые примеры, воспроизводящие особенности сходимости итераций в исходной задаче. С их помощью выбирается одна из модификаций метода, обеспечивающая сходимость. Приводятся результаты решения задачи оптимального управления ЛА в сравнении с одним эмпирическим способом формирования управления ЛА.

1. Введение

Увеличение дальности полета летательных аппаратов (ЛА) является всегда актуальной задачей. На дальность существенное влияние оказывает управление ЛА – если повысить траекторию, то уменьшится плотность воздуха и, соответственно, лобовое сопротивление. С другой стороны, уменьшатся и маневренные возможности ЛА с аэродинамическим управлением, а сам маневр по высоте требует энергзатрат.

Известны различные эмпирические подходы к формированию рационального по дальности полета управления ЛА (например, [1]). Цель настоящей работы – прямое решение задачи максимизации дальности полета ЛА с нелинейными аэродинамическими характеристиками с учетом переменных по высоте характеристик атмосферы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим продольное движение ЛА. Пусть длительность полета настолько велика, что собственным угловым движением ЛА можно пренебречь. Тогда считаем, что рулевые органы ЛА (далее – рули) отклоняются безинерционно, а ЛА безинерционно поворачивается на соответствующий углу отклонения рулей δ балансирующий угол атаки $\alpha_{бал}(\delta)$. Примем функцию изменения δ по времени t в качестве управляющего воздействия данной динамической системы. Уравнения движения [2] системы:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{qS}{m(t)}(c_{x0}(M, H) + c_{xi}(M, \delta)) + \frac{P(t)}{m(t)} \cos \alpha - g(H) \sin \Theta, \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{V} \left(\frac{qS}{m(t)} c_y(M, \delta) + \frac{P(t)}{m(t)} \sin \alpha - g(H) \cos \Theta \right), \\ \frac{dX}{dt} = V \cos \Theta, \quad \frac{dY}{dt} = V \sin \Theta, \quad |\delta(t)| \leq \delta_{max}, \end{cases}$$

где V, Θ, X, Y – переменные состояния ЛА (модуль скорости, угол наклона траектории и координаты соответственно в декартовой инерциальной системе координат), $P(t), m(t)$ – функции изменения тяги и массы ЛА соответственно, S – характерная площадь ЛА, $H = H(X, Y)$ – высота точки (X, Y) над поверхностью Земли, $M = V/a(H)$ – число Маха, $q = ((V \cos \Theta - W_x(H))^2 + (V \sin \Theta)^2) \rho(H)/2$ – скоростной напор, $a(H), \rho(H), W_x(H), g(H)$ – высотные профили скорости звука, плотности воздуха, скорости горизонтального ветра и ускорения свободного падения соответственно, $\alpha = \alpha_{бал}(\delta) + (W_x(H)/V) \sin \Theta$ – угол атаки, $c_{x0}(M, H), c_{xi}(M, \delta), c_y(M, \delta)$ – аэродинамические характеристики ЛА, δ_{max} – максимальный угол отклонения руля, ограничивающий множество допустимых функций $\delta(t)$. Здесь все величины, обозначенные как функции, задаются таблично и реализуются интерполяцией.

Требуется для заданных параметров системы (1), начальных условий V_0, Θ_0, X_0, Y_0 при $t=0$ и длительности полета t_{II} найти допустимую функцию $\delta_{opt}(t), 0 \leq t \leq t_{II}$, максимизирующую координату $X(t_{II})$.

3. Применение метода Крылова-Черноузько

3.1. Базовый итерационный алгоритм

Введем вектор состояния системы $x = (V, \Theta, X, Y)^T$. Здесь и далее все переменные-вектора являются вектор-столбцами. Обозначим через $f(x, \delta)$ вектор-функцию, реализующую правые части дифференциальных уравнений (1). Задача примет вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), \delta(t)), \quad x(0) = (V_0, \Theta_0, X_0, Y_0)^T, \quad 0 \leq t \leq t_{II}, \\ -c^T x(t_{II}) &\rightarrow \min, \quad c^T = (0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности [3] для $\delta_{opt}(t)$:

$$(3) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = -\left(\frac{\partial f(x(t), \delta(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t), \quad \psi(t_{II}) = c, \quad 0 \leq t \leq t_{II},$$

$$(4) \quad \delta_{opt}(t) = \arg \max_{|\delta| \leq \delta_{max}} (\psi(t)^T f(x(t), \delta)),$$

где ψ – вектор состояния сопряженной системы (3).

Уравнения (2)-(4) образуют двухточечную краевую задачу, для решения которой широко применяется итерационный алгоритм [4] (будем называть его базовым), часто именуемый по фамилиям авторов [4] методом Крылова-Черноузько, и различные его модификации [5]. Все они обладают общей структурой. По эмпирическим соображениям (например, для данной задачи аналогичным [1]) выбирается начальное приближе-

ние управления $\delta_1(t)$. Затем итерационно повторяется следующая последовательность действий:

- при $\delta(t) = \delta_k(t)$ решается система (2), где $k = 1, 2, \dots$ – номер итерации, получается траектория $x_k(t)$;
- при $\delta(t) = \delta_k(t)$, $x(t) = x_k(t)$ решается в обратном времени система (3), получается траектория $\psi_k(t)$;
- при $x(t) = x_k(t)$, $\psi(t) = \psi_k(t)$ из уравнения (4) определяется функция $\delta_{omk}(t)$ (не являющаяся решением задачи (2 – 4), т.к. уравнения решались несовместно);
- вычисляется новое приближение управления $\delta_{k+1}(t)$.

Модификации алгоритма отличаются только процедурой вычисления $\delta_{k+1}(t)$.

В базовом алгоритме [4] $\delta_{k+1}(t) = \delta_{omk}(t)$. Данный алгоритм на исследуемой реализации системы (1) не сходится. Графики фазовых траекторий и изменения критерия качества на первых 10 итерациях приведены на рис. 1. Видно, что возникают «периодические движения» алгоритма – траектории четных и нечетных итераций повторяются.

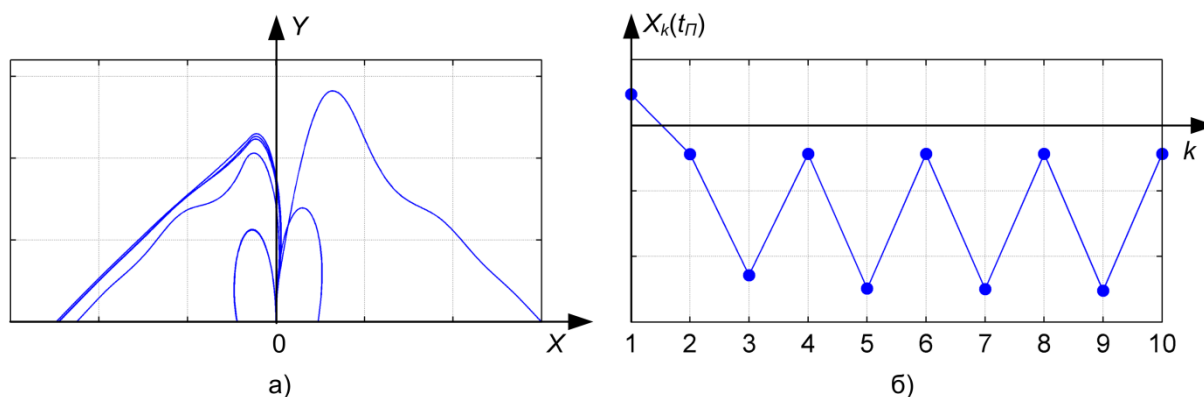


Рис. 1. Пример фазовых траекторий (а) и критерия качества (б) на первых 10 итерациях применения базового алгоритма к исследуемой реализации системы (1),

3.2. Выбор модификации метода Крылова-Чернуосько

Для выбора модификации базового алгоритма проблема сходимости воспроизведена на простом тестовом примере. Рассмотрим следующую задачу:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), & \frac{dx_2(t)}{dt} = \varphi\left(\frac{\delta(t) - 2\xi\tau x_2(t) - x_1(t)}{\tau^2}\right), & |\delta(t)| \leq 1, \\ 0 \leq t \leq 3, & x_1(0) = x_2(0) = 0, & x_1(3) \rightarrow \max, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – переменные состояния, $\tau = 1/(2\pi)$, $\xi = 0,2$ – константы, $\varphi(\chi)$ – нелинейная функция. Периодические чередования траекторий при итерациях базового алгоритма получены для (5) при $\varphi(\chi) = \arctg \chi$ (имитация колебательной системы с насыщением) и $\varphi(\chi) = \chi^3$ (имитация колебательной системы с зоной нечувствительности).

Из [5] известны следующие основные подходы к обеспечению сходимости:

- 1) Уменьшение эффективности управления $\delta_{k+1}(t) = \varepsilon_k \delta_{omk}(t)$, где $\varepsilon_k \in (0, 1]$ – понижающий множитель, возрастающий до 1 при переходе с итерации на итерацию по мере сходимости решения. Данный подход не решает проблемы сходимости задачи (5), т.к. существует пороговая величина ε_{nop} , такая что при $\varepsilon_k < \varepsilon_{nop}$ решение сходится, а при $\varepsilon_k > \varepsilon_{nop}$ расходится независимо от начального приближения управле-

ния. Аналогичная проблема возникает и при введении понижающего множителя в правую часть уравнения (2).

- 2) Уменьшение скорости изменения управления между итерациями $\delta_{k+1}(t) = \alpha_k \delta_{onm}(t) + (1 - \alpha_k) \delta_k(t)$, где $\alpha_k \in (0, 1]$ – величина, выбирающаяся на каждой итерации из условия уменьшения критерия качества $-c^T x(t_{II})$. Величины α_k выбирались по рекомендации [6] – перебором членов геометрической прогрессии

$$(6) \quad \alpha_k \in \{b^{-i}\}, \quad b > 1, \quad i \in Z_0$$

до первого члена, обеспечивающего уменьшение $-c^T x(t_{II})$ после итерации. Получена сходимость алгоритма для системы (5), в том числе при различных вариациях параметров τ и ξ .

- 3) Уменьшение по времени области изменения управления между итерациями

$$\delta_{k+1}(t) = \begin{cases} \delta_{onm}(t), & t \in T_k, \\ \delta_k(t), & t \notin T_k, \end{cases}$$

где $T_k \subseteq [0, t_{II}]$ – множество, получаемое решением дополнительной задачи оптимизации критерия качества $-c^T x(t_{II})$. Обычно данная задача, как минимум, двух-параметрическая (T_k полагается отрезком, начало и конец которого неизвестны). Поэтому определение T_k представляется вычислительно-затратным и, в связи с успешным решением задач подходом №2, данный подход не рассматривался.

4. Примеры решения задачи управления ЛА

Выбранная в п.3.2 модификация базового алгоритма успешно решает задачу оптимизации для исследуемой системы (1). Опытным путем установлено, что наименьшее время вычислений получается, если принять в (6) $b = 3$. В качестве начального приближения управления $\delta_1(t)$ взято трехпозиционное управление, воспроизводящее первые три участка из [1]:

- сначала управлением $\delta(t) = \delta_{max} \text{sign}(\Theta_\delta - \Theta(t))$ траектория поворачивается до достижения угла наклона Θ_δ , равного углу баллистического пуска с поверхности земли на максимальную (для баллистической траектории) дальность ($\Theta_\delta \approx 1$ рад);
- затем при нулевом управлении $\delta(t) = 0$ ЛА летит, пока $\Theta(t) > 0$;
- после чего ЛА планирует с максимальным управлением вверх $\delta(t) = +\delta_{max}$.

Ниже на рис. 2 показаны примеры управлений и траекторий, принятых в качестве начальных приближений и получающихся в результате оптимизации для различных начальных условий.

Из рис. 2а видно, что разрывы («скачки») в управлении после оптимизации совпадают по времени с таковыми до оптимизации, что говорит о локальном характере оптимизации и существенной зависимости результатов от начального приближения.

Из рис. 2б видно, что после оптимизации управление в исследуемой реализации (1) может иметь разрывы и при непрерывном начальном приближении. Эти разрывы объясняются использованием линейной интерполяции для функций в (1), при которой переход через точку в интерполяционной таблице приводит к разрыву правой части в уравнениях сопряженной системы (3). Строго говоря, для такой реализации условия (2)-(4) некорректны, т.к. примененный принцип максимума требует дифференцируемости по x правой части уравнений движения (2) [3]. Однако на практике оптимизация с использованием данных условий привела к увеличению дальности полета ЛА.

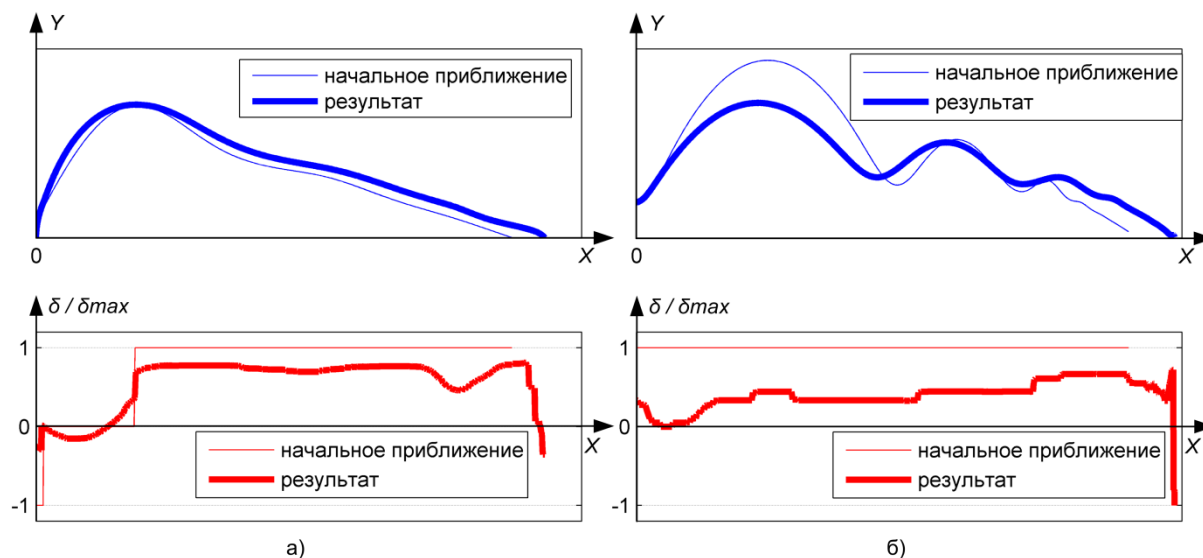


Рис. 2. Пример траекторий и управлений для наземного старта ЛА (а) и старта ЛА с воздушного носителя (б) исследуемой реализации системы (1)

5. Заключение

В работе рассмотрена задача максимизации дальности полета ЛА с нелинейной аэродинамической моделью в атмосфере с переменными по высоте характеристиками. Задача решена одной из модификаций метода Крылова-Черноусько. Метод обеспечивает локальную оптимизацию относительно начального варианта траектории, формируемого на основе эмпирических соображений. Метод обеспечивает сходимость, несмотря на негладкость правых частей уравнения движения по причине использования линейной интерполяции характеристик ЛА и атмосферы.

Список литературы

1. Шипунов А.Г., Морозов В.И., Голомидов Б.А., Шамин М.С., Хельберг Ф.М., Шестакова Л.А. Способ наведения ракеты. Патент РФ 2183006; опубл. 27.05.2002.
2. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полет беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов / 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2, № 6. С. 1132-1139.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
6. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 1. С. 14-34.