УДК 519.246.2: 681.518.22

ОПТИМАЛЬНАЯ КОНЕЧНОМЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНЫХ СИГНАЛОВ

Е.А. Руденко

Московский авиационный институт (*национальный исследовательский университет*)

Россия, 125871, Москва, Волоколамское ш., 4

E-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Ключевые слова: непрерывная стохастическая система наблюдения, гауссовские и пуассоновские возмущения, дискретные измерения, оптимальная нелинейная фильтрация

Аннотация: рассматривается задача оценивания текущего состояния непрерывного стохастического объекта управления, подверженного непрерывным и импульсным случайным воздействиям, по результатам дискретных измерений его выходов. Для создания оптимального по точности алгоритма оценивания, реализуемого в темпе со временем на вычислителе ограниченной мощности, предлагается способ синтеза нового конечномерного фильтра с кусочно-постоянным прогнозом. Вектор его состояния составляется из нескольких последних векторов оценки, а текущая оценка ищется в виде ее зависимости от последнего измерения и предыдущего состояния фильтра.

1. Введение

Из-за случайных импульсных воздействий состояние непрерывной динамической системы может изменяться скачками [1,2]. Математическая модель такого его поведения – марковский кусочно-непрерывный (диффузионно-скачкообразный) случайный процесс, а его плотность вероятности удовлетворяет известному уравнению Колмогорова–Феллера (УКФ), который является интегродифференциальным уравнением в частных производных. Оптимальное оценивание такого процесса по его дискретным измерениям с помощью классического абсолютно-оптимального фильтра Стратоновича требует сложного нахождения апостериорного распределения вероятности. В промежутках между измерениями требуется интегрировать УКФ (прогнозирование), а при появлении нового измерения – пересчитывать конечное сечение его решения по формуле Байеса-Стратоновича в начальное условие для следующего промежутка (коррекция). Выполнение этих операций в темпе со временем требует больших объема памяти и быстродействия вычислителя. На практике это заставляет использовать приближенные конечномерные алгоритмы фильтрации вроде обобщенного фильтра Калмана.

В настоящей работе предлагается развитие другого подхода, позволяющего получать реализуемы в отличие от фильтров с конечной памятью [5], имеют бесконечное время памяти. Кроме того, класс диффузионных оцениваемых сигналов расширяется на диффузионно-скачкообразные сигналы. Для простоты ограничимся построением фильтра только с постоянным прогнозом.

2. Постановка задачи синтеза фильтра

Рассмотрим изменяющуюся во времени $t \in [0,T]$ случайную вектор-функцию полезного сигнала $X_t \in \mathbb{R}^n$, которая являются кусочно-непрерывной справа $X_t = X_{t+}$ и имеющей предел слева X_{t-}. Пусть известен формирующий фильтр этого сигнала в виде уравнения Ито с винеровской и пуассоновской составляющими. В нестрогой дифференциальной форме Ланжевена это уравнение объекта наблюдения имеет вид

(1) $$\dot{X}_t = a(t, X_{t-}) + B(t, X_{t-})\dot{W}_t + S(t, X_{t-})\Pi_t(X_{t-}),\ X_0 \sim p_0(x).$$

Здесь $a(t,x)$ – вектор-функция сноса; $B(t,x)$ – матричная функция диффузии; $\dot{W}_t \in \mathrm{R}^l$ – гауссовский белый шум, являющийся обобщенной производной стандартного (центрированного и нормированного) винеровского процесса W_t; $\Pi_t(x) \in \mathrm{R}_+$ – условный (при $X_t = x$) простой пуассоновский белый шум, который генерирует случайные моменты времени скачков; $S(t,x)$ – случайный вектор амплитуд скачков, определяемый условной плотностью вероятности $\xi(t,s\,|\,x)$. При этом все воздействия W_t, $\Pi_t(x)$, $S(t,x)$ независимы и не зависят от случайного начального условия X_0, определяемого плотностью вероятности $p_0(x)$, а пуассоновский шум $\Pi_t(x)$ имеет вид последовательности левосторонних импульсов Дирака $\delta_-(\cdot)$, которые могут появиться на $[t;T)$:

$$\Pi_t(x) = \sum_{i=1}^{P_t^T(x)} \delta_-\left[t - \mathrm{T}_i(X_{\mathrm{T}_i -})\right].$$

Здесь $\mathrm{T}_i(\cdot)$ – зависящий от предыдущего состояния $X_{\mathrm{T}_i -}$ системы (1) случайный пуассоновский момент времени появления *i*-го импульса, последовательность которых возникает с условной интенсивностью $\mu(t,x)$; $P_t^T(x)$ – считающий число этих импульсов за время $[t;T)$ целочисленный случайный процесс

$$P_t^T(x) = \left\{ i : \left[\mathrm{T}_1(X_{\mathrm{T}_1 -}),\dots,\mathrm{T}_k(X_{\mathrm{T}_i -})\right] \in [t;T), X_t = x \right\}$$

с законом распределения Пуассона, определяемым следующими соотношениями:

$$\mathrm{Prob}\left[P_t^T(x) = i\right] = \frac{\nu^i(t,T,x)}{i!\,e^{\nu(t,T,x)}},\ \nu(t,T,x) = \int_t^T \mu(\tau,x)\,d\tau.$$

Пусть также в каждый известный тактовый момент времени t_k производится измерение вектора X_t, в том числе неполное или неточное, определяемое по формуле

(2) $$Y_k = c_k(X_{t_k}, V_k),\ V_k \sim q_k(v),\ k \in \{0,1,\dots\},\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

Здесь Y_k – вектор измерения, V_k – вектор независимого дискретного белого шума.

Требуется, используя в каждый момент времени между соседними тактовыми моментами $t \in [t_k, t_{k+1})$ все предшествующие измерения $Y_0^k = (Y_0, Y_1, \dots, Y_k)$, найти оценку $Z_k = \hat{X}_{t_k}$ только тактового значения X_{t_k} сигнала X_t в момент времени t_k как функцию лишь последнего измерения Y_k и не более чем $l \in \mathrm{N}$ предыдущих тактовых оценок

(3) $$Z_k = g_k(Y_k, Z_{\max(0,k-l)}^{k-1}),\ k \ge 1,\ Z_0 = g_0(Y_0).$$

При этом оценку между измерениями (прогноз) будем считать постоянной

(4) $$\hat{X}_t = Z_k,\ t \in [t_k, t_{k+1}),\ k \ge 0,$$

а от тактовой оценки (3) потребуем минимизации среднеквадратической ошибки

(5) $$I_k = \mathrm{M}[(X_{t_k} - Z_k)^{\mathrm{T}} C_k (X_{t_k} - Z_k)] \to \min_{g_k(\cdot)} \quad \forall k \geq 0 .$$

Здесь M – оператор усреднения, $C_k = C_k^{\mathrm{T}} > 0$ – матрица весовых коэффициентов.

Таким образом, для оценивания случайного процесса (1) по дискретным измерениям (2) предлагается синтезировать дискретный фильтр (3). В отличие от фильтра с конечной памятью [5] здесь старые измерения не забываются, они аккумулируются в оценках, поэтому время памяти фильтра (3) как динамической системы бесконечно. При этом рассмотренный в [3] фильтр является частным случаем (3) при $l = 1$.

3. Рекуррентность и порядок предлагаемого фильтра

Покажем, что фильтр (3) является рекуррентным. Для этого соберем l последних оценок в вектор растущей, вначале, размерности

$$U_k = Z^k_{\max(0,k-l+1)} = \begin{cases} Z_0^k, \ k = 0..(l-1) \ \text{(накопление)}, \\ Z_{k-l+1}^k, \ \ k \geq l \ \text{(обновление)}. \end{cases}$$

Тогда искомое соотношение (3) принимает вид

(6) $$Z_k = g_k(Y_k, U_{k-1}), \ k \geq 1, \ Z_0 = g_0(Y_0),$$

а заполнение вектора U_k учитываемых оценок можно записать рекуррентно [7, 8]

(7) $$U_k = f_k(Z_k, U_{k-1}), \ \ k \geq 1, \ \ U_0 = Z_0 .$$

Здесь $f_k(\cdot)$ – вектор-функция накопления или обновления оценок

(8) $$f_k(z_k, u_{k-1}) = \begin{cases} [z_k^{\mathrm{T}} \quad u_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad k = 1..(l-1), \\ [z_k^{\mathrm{T}} \quad (C u_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \qquad k \geq l, \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} E_{(l-1)n} & O_{(l-1)n \times n} \end{bmatrix},$$

где C – матрица удаления из блочного вектора U_{k-1} его последнего, устаревшего, блока Z_{k-l}, тогда как E, O – единичная и нулевая матрицы соответственно.

Соотношение (7) позволяет называть U_k вектором состояния рекуррентного фильтра (6), (7) с фиксированным уравнением состояния, размерность фильтра (его порядок) не превосходит величины $p = ln$ и может быть сделана сколь угодно большой, а оптимизации по критерию (5) подлежит только функция $g_k(\cdot)$ формулы его выхода (6).

4. Нахождение оптимальной структуры фильтра

Подставляя формулу для оценки (6) в критерий (5), при $k \geq 1$ получаем оптималь

(9) $$g_k(y_k, u_{k-1}) = \mathrm{M}\left[X_{t_k} \mid Y_k = y_k, U_{k-1} = u_{k-1} \right] = \int x_k \, \rho_k(x_k \mid y_k, u_{k-1}) \, dx_k ,$$

а оценка Z_k оказывается несмещенной. Здесь $\rho_k(\cdot)$ – оценивающая условная плотность вероятности, а этот и все записанные ниже интегралы являются определенными и берутся по всему евклидову пространству соответствующей размерности. Начальная же функция $g_0(\cdot)$ определяется аналогично по условной плотности

$$\rho_0(x_0 \mid y_0) = \beta_0(y_0 \mid x_0) \, p_0(x_0) \Big/ \int numerator \, dx_0 ,$$

где $p_0(x)$ – плотность начального состояния объекта (1), а $\beta_k(y_k\,|\,x_k)$ – условная плотность вероятности измерения Y_k (функция правдоподобия), получаемая по (2).

Для нахождения плотности $\rho_k(\cdot)$ при $k \ge 1$ используем формулу Байеса, а также свойства марковости объекта (1) и измерителя (2). Аналогично [5] получим

(10) $$\rho_k(x_k\,|\,y_k,u_{k-1}) = \beta_k(y_k\,|\,x_k)\,\pi_{k-1}(t_k,x_k\,|\,u_{k-1}) \Big/ \int numerator\,dx_k\,,$$

где прогнозирующая плотность $\pi_{k-1}(\cdot)$ выражается через совместную плотность вероятности $r_{k-1}(\cdot)$ двух случайных величин X_{t_k}, U_{k-1} как отношение

$$\pi_{k-1}(t_k,x\,|\,u_{k-1}) = r_{k-1}(t_k,x,u_{k-1}) \Big/ \int numerator\,dx\,.$$

Здесь каждая из плотностей $r_k(t_{k+1},x,u_k)$ является конечным сечением изменяющейся между измерениями Y_k, Y_{k+1} плотности $r_k(t,x,u_k)$, которая удовлетворяет УКФ:

(11) $$\frac{\partial}{\partial t} r_k(t,x,u_k) = K_x[r_k(t,x,u_k)] + F_x[r_k(t,x,u_k)],\ t\in[t_k,t_{k+1}),\ k \ge 0\,,$$

где K_x, F_x – прямые производящие операторы диффузионно-скачкообразного процесса X_t: дифференциальный оператор Фоккера–Планка–Колмогорова

$$K_x[r(t,x,u)] = -\nabla_x^{\mathrm{T}}[a(t,x)\,r(t,x,u)] + 0.5\,\mathrm{tr}\Big[\nabla_x\nabla_x^{\mathrm{T}}\Big(B(t,x)\,B^{\mathrm{T}}(t,x)\,r(t,x,u)\Big)\Big]$$

и интегральный оператор Колмогорова–Феллера

$$F_x[r(t,x,u)] = -\mu(t,x)\,r(t,x,u) + \int \mu(t,x-s)\,r(t,x-s,z)\xi(t,s\,|\,x-s)\,ds.$$

Начальное условие для каждого из уравнений (11) определяется по формулам, которые осуществляют пересчет конечного сечения $r_{k-1}(t_k^-,x,z_{k-1})$ решения предыдущего УКФ из серии (11) в начальное условие $r_k(t_k,x,z_k)$ для последующего:

$$r_0(t_0,x_0,z_0) = p_0(x_0)\int \delta[z_0 - g_0(y_0)]\,\beta_0(y_0\,|\,x_0)\,dy_0\,,$$

$$r_k(t_k,x_k,z_0^k) = r_{k-1}(t_k^-,x_k,z_0^{k-1})\int \delta[z_k - g_k(y_k,z_0^{k-1})]\,\beta_k(y_k\,|\,x_k)\,dy_k\,,\ k=\overline{1,l-1}\,,$$

$$r_k(t_k,x_k,z_{k-l+1}^k) = \iint \delta[z_k - g_k(y_k,z_{k-l}^{k-1})]\beta_k(y_k\,|\,x_k) r_{k-1}(t_k^-,x_k,z_{k-l}^{k-1}) dy_k dz_{k-l},\ k \ge l.$$

Здесь $t_k^- = t_k -$, а появившийся в последнем равенстве интеграл по z_{k-l} вызван удалением из блочного вектора U_k устаревшей оценки Z_{k-l} в соответствии с (7), (8).

Полученные соотношения можно реализовать численно методом Монте-Карло, когда нахождение плотностей вероятности заменяется последовательным во времени статистическим моделированием уравнений объекта (1), измерителя (2) и фильтра (6), (7). Его целью является получения больших пакетов реализаций случайных величин X_k, Y_k, U_{k-1}, позволяющих строить гистограммы оптимальных функций оценивания (9).

5. Гауссовское приближение к фильтру

Однако представленная выше процедура точного синтеза фильтра (6), (7) довольно громоздка. Поэтому рассмотрим построение одного из численно-аналитических приближений к этому фильтру. Вид структурных функций (9) такого приближения находится уже аналитически, а их параметры вычисляются методом Монте-Карло проще, лишь по выборочным значениям двух первых моментов переменных X_k, U_{k-1}.

Аппроксимируя нормальной плотностью вероятности числитель $\eta_k(x_k, y_k \mid u_{k-1})$ отношения (10) и конечное сечение $r_{k-1}(t_k^-, x, u_{k-1})$ решения УКФ (11) на интервале $t \in [t_{k-1}, t_k)$, подобно [5] получим, что уравнения фильтра (6), (7) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = H_0 Y_0 + e_0, \quad U_k = Z^k_{\max(0,k-l+1)}, \quad \Lambda_k = \Gamma_k U_{k-1} + \kappa_k, \quad k \ge 1, \\
&Z_k = \Lambda_k + T_k G_k^{\mathrm{T}}(\Lambda_k, T_k) F_k^{\oplus}(\Lambda_k, T_k)\big[Y_k - h_k(\Lambda_k, T_k)\big], \quad k \ge 1.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь $H_0 = D_{00}^{xy}(D_0^y)^{\oplus}$, $e_0 = m_0^x - H_0 m_0^y$, функции гауссовской коррекции $h_k(\cdot)$, $G_k(\cdot)$, $F_k(\cdot)$ определены в [5,8], а параметры Γ_k, κ_k, T_k находятся заранее по формулам

$$
\Gamma_k = D^{x,u}_{t_k^-,k-1}(D^u_{k-1})^{\oplus}, \quad \kappa_k = m^x_{t_k^-} - \Gamma_k m^u_{k-1}, \; T_k = D^x_{t_k^-} - \Gamma_k (D^{x,u}_{t_k^-,k-1})^{\mathrm{T}}.
$$

Принципиальные отличия (12) от использующего те же функции коррекции гауссовского приближения к фильтру Стратоновича [9] состоят в других их аргументах. Привычная матрица апостериорных ковариаций $\mathrm{cov}[X_{t_k} \mid Y_0^k]$ заменена здесь матричным параметром T_k, благодаря чему объем вычислений сокращается. Вектор же прогноза Λ_k является несмещенным и находится не долгим интегрированием системы из $n(n+3)/2$ дифференциальных уравнений, а сразу с помощью параметров Γ_k, κ_k. Последние учитывают, к тому же, не одну, а несколько предыдущих тактовых оценок.

6. Заключение

Предложенный фильтр (3), (4) является рекуррентным (6), (7), прост в реализации и может быть построен заранее. При этом его постоянный прогноз (4) несложно заменить кусочно-постоянным, дополнив промежуток времени между измерениями $[t_k, t_{k+1})$ моментами уточнения прогноза как в [3,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-08-00530-а).

Список литературы

1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
2. Situ R. Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. Springer, 2005.
3. Руденко Е.А. Оптимальные дискретные конечномерные алгоритмы идентификации состояния и параметров движущихся объектов при дискретных измерениях // Теория и методы идентификации и управления движущимися объектами: Тем. сб. науч. тр. М.: МАИ, 1988. С. 43-52.
4. Руденко Е.А. Оптимальный непрерывно-дискретный нелинейный фильтр малого порядка // Труды X Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '15. Москва, 26-29 января 2015 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2015. С. 1335-1349.
5. Руденко Е.А Оптимальный непрерывно-дискретный нелинейный фильтр с конечной памятью и дискретными прогнозами // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 38-52.
6. Rudenko E.A. Continuous Finite-Dimensional Locally Optimal Filtering of Jump Diffusions // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018, Vol. 57, No. 4. P. 505528.
7. Рик А.А., Руденко Е.А. Оптимальные конечномерные непрерывно-дискретные нелинейные фильтры диффузионных сигналов // XII Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ '2018). Алушта, Крым, 24-31 мая 2018 г. М.: Изд-во МАИ, 2018. С. 646-649.
8. Руденко Е.А. Методы и алгоритмы оптимальной конечномерной нелинейной фильтрации случайных марковских последовательностей // Матер. XXXI конф. памяти Н.Н. Острякова. СПб.: ЦНИИ Электроприбор, 2018. С. 133-145.

9. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.