УДК 517.95

НЕПРЕРЫВНОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Л.Г. Шагалова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620990, Екатеринбург, С. Ковалевской ул., 16

E-mail: shag@imm.uran.ru

Ключевые слова: уравнение Гамильтона - Якоби, некоэрцитивный гамильтониан, фазовые ограничения, обобщенное решение, глобальное решение, характеристики, асимптотика.

Аннотация: Рассматривается возникающее в модели Кроу – Кимуры молекулярной биологии уравнение Гамильтона – Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом. Изучается задача Коши для этого уравнения с фазовыми ограничениями. Ранее с помощью методов оптимального управления и вариационного исчисления было доказано существование непрерывного обобщенного решения этой задачи на конечном отрезке времени, определяемом условием продолжимости характеристик. В данной работе представлены достаточные условия существования глобального (определенного на бесконечном временном интервале) непрерывного обобщенного решения, сохраняющего структуру, задаваемую начальным многообразием, и изучено поведение этого решения при больших значениях времени.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается следующее уравнение Гамильтона – Якоби, полученное в [1] для модели Кроу – Кимуры молекулярной эволюции.

(1) $$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0,$$

где гамильтониан имеет вид

(2) $$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}.$$

Входящая в (2) непрерывно дифференцируемая функция $f(\cdot)$ называется фитнесом. Уравнение (1) рассматривается при $t \geqslant 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Предполагается также, что задана непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : R \to R$ такая, что выполняется начальное условие

(3) $$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1;1].$$

Гамильтониан $H(\cdot)$ не удовлетворяет условию коэрцитивности

(4) $$H(x,p) \to -\infty \quad \text{при} \quad |p| \to \infty$$

при $x = \pm 1$. Рассматриваемая задача не имеет классического решения, к ней неприменимы также известные концепции обобщенного решения – минимаксного [2] и вязкостного [6].

В [3] введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи (1)-(3), с помощью методов теории оптимального управления доказано его существование и показана неединственность. В [4, 5] выделены достаточные условия существования и обоснована конструкция обобщенного решения заданной структуры, такого, что в области, где определены выпущенные с начального многообразия классические характеристики уравнения (1), решение строится с их помощью. При этом решения рассматривались на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Pi}_T = [0;T] \times [-1;1]$, где момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости на отрезок $[0,T]$ характеристик – решений следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(5)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p), \end{aligned}$$

которая рассматривается вместе с начальными условиями

$$(6)\qquad x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \qquad y \in [-1;1].$$

Здесь $H_x(x,p)$ и $H_p(x,p)$ обозначают частные производные гамильтониана H в точке (x,p) соответственно по переменным x и p.

В [9] задача была рассмотрена на бесконечном временном интервале $t \geqslant 0$, введено понятие глобального обобщенного решения и выделены достаточные условия существования глобального обобщенного решения заданной структуры.

В настоящей работе конкретизированы условия на входные данные задачи (фитнес и начальную функцию), при которых выполнены достаточные условия существования глобального обобщенного решения заданной структуры, и проведено исследование поведения этого решения при больших значениях t – показано, что решение не имеет асимптотики.

2. Обобщенное решение на конечном отрезке времени

Приведем введенное в [3] определение непрерывного обобщенного решения. Для этого введем обозначения и напомним понятия суб- и супердифференциала

Пусть задано множество $W \subset R^2$. Символами $\overline{W}$ и co$W$ будем обозначать соответственно его замыкание и выпуклую оболочку. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ и $(t,x) \in \overline{W}$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$(7)\qquad D^- u(t,x) = \left\{ (a,s) \in R^2 \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x) \\ (\tau,y)\in\overline{W}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geqslant 0 \right\}$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+u(t,x)=\left\{(a,s)\in R^2\;\middle|\;\limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in\overline{W}}}\frac{u(\tau,y)-u(t,x)-a(\tau-t)-s(y-x)}{|\tau-t|+|y-x|}\leqslant 0\right\} \tag{8}$$

Пусть функция $u(\cdot)\in C(\overline{\Pi}_T)$ и точка $(t,x)\in\overline{\Pi}_T$. Символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множества

$$\partial_C u(t,x)=\mathrm{co}\Big\{(a,s)\;\Big|\;a=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\;s=\lim_{i\to\infty}\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x};$$
$$(t_i,x_i)\to(t,x)\text{ при }i\to\infty,\quad (t_i,x_i)\in\overline{\Pi}_T\cap\mathrm{Dif(u)}\Big\},$$

$\Pi_T=(0,T)\times(-1;1)$, $\Gamma_T=\{(t,x)|\,0<t<T, x=1\}\cup\{(t,x)|\,0<t<T,\;x=-1\}$.

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (3) и условиям*

$$a+H(x,s)\leqslant 0,\quad \forall\,(t,x)\in\Pi_T,\,\forall\,(a,s)\in D^+u(t,x), \tag{9}$$

$$a+H(x,s)\geqslant 0,\quad \forall\,(t,x)\in\Pi_T,\,\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x), \tag{10}$$

$$a+H(x,s)\geqslant 0,\quad \forall\,(t,x)\in\Gamma_T,\,\forall\,(a,s)\in D^-u(t,x)\cap\partial_C u(t,x). \tag{11}$$

Отметим, что определение 1 отличается от определения вязкостного [6,7] решения введением пересечения субдифференциала $D^-u(t,x)$ с множеством $\partial_C u(t,x)$. Это обусловлено тем обстоятельством, что в силу некоэрцитивности гамильтониана H (2) субдифференциал $D^-u(t,x)$ в точке $(t,x)\in\Gamma_T$, если он непуст, является неограниченным множеством, и без введения пересечения проверка условия (11), например, при $x=1$ сводится к неравенству

$$a+H(1,s+k)=a-f(x)+1-e^{s+k}\leqslant 0\quad\forall k\geqslant 0,$$

которое, очевидно, не выполняется.

В [3] доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть функции $f(\cdot):[-1,1]\to R$, и $u_0(\cdot):\;[-1,1]\to R$ являются непрерывно дифференцируемыми. Тогда существует обобщенное решение $u(\cdot):\overline{\Pi}_T\to R$ в смысле определения 1.*

2.1. Обобщенное решение заданной структуры

Из доказательства теоремы 1 следует, что обобшенное решение не является единственным. Поэтому важной является описанная ниже задача о построении обобщенного решения заданной структуры.

Пусть область $\Omega_0 \subset \overline{\Pi}_T$ образована графиками фазовых компонент характеристик (5)-(6):

$$\Omega_0 = \{(t,x)|\ 0 \leqslant t \leqslant T, x = x(t,y),\ y \in [-1,1]\}.$$

Рассмотрим функцию $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_0$ вида:

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x} \left[\int_0^t p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) d\tau + u_0(y) \right], \tag{12}$$

где $x(t) = x(t,y)$ и $p(t) = p(t,y)$, $t \geqslant 0$, являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (5)-(6), определяемого параметром $y \in [-1;1]$.

Задача о построении обобщенного решения заданной структуры заключается в построении непрерывного продолжения функции (12) на всю область $\overline{\Pi}_T$ так, чтобы полученная функция являдась обобщенным решением задачи (1)-(3) в смысле определения 1.

2.1.1. Достаточные условия существования решения заданной структуры. Пусть $x^-(t) = x(t,-1)$ и $x^+(t) = x(t,+1)$, $t \in [0,T]$ – фазовые компоненты характеристик, выпущенных в момент $t = 0$ из точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно.

Предположим, что для задачи (1)-(3) выполнены следующие условия

A. Фазовые компоненты $x(\cdot, y)$ и импульсные компоненты $p(\cdot, u_0'(y))$ характеристической системы (5) с начальными условиями (6) при $t = 0$ определены и удовлетворяют неравенствам

$$-1 \leqslant x^-(t) = x(t,-1) \leqslant x(t,y) \leqslant x(t,+1) = x^+(t) \leqslant 1, \quad |p(t, u_0'(y)| < \infty, \tag{13}$$

для всех $y \in [-1,1]$, $t \in [0,T)$.

Пусть $\Pi_T = G_+ \cup G_0 \cup G_-$, где

$$G_0 = \big\{(t,x)\,\big|\, t \in [0,T],\ x^-(t) \leqslant x \leqslant x^+(t)\big\}. \tag{14}$$

$$G_+ = \big\{(t,x)\,\big|\, t \in [0,T],\ x^+(t) \leqslant x \leqslant 1\big\}, \tag{15}$$

$$G_- = \big\{(t,x)\,\big|\, t \in [0,T],\ -1 \leqslant x \leqslant x^-(t)\big\}, \tag{16}$$

Таким образом, наша цель заключается в построении обобщенного решения, которое совпадает с функцией (12) в области $\Omega_0 = G_0$. В [5] были указаны следующие условия, при которых существует такое решение.

B1. Производная $u_0'(\cdot) : [-1,1] \to R$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$u_0'(1) < 0, \quad u_0'(-1) > 0.$$

B2. Производная $f'(\cdot)\colon [-1,1] \to R$ – непрерывная и монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$2f'(1) + e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

2.1.2. Непрерывное продолжение решения, сформированного из характеристик. Для доказательства существования непрерывного продолжения функции (12) на область $\overline{\Pi}_T$, удовлетворяющего определению 1 обобщенного решения, рассмотрим две вспомогательных задачи вариационного исчисления.

Пусть

$$H^*(x(t), \dot{x}(t)) = \inf_{p \in R}[p\dot{x}(t) - H(x(t), p)] \tag{17}$$

является гамильтонианом, сопряженным к исходному гамильтониану (2).

Рассмотрим две вспомогательных задачи вариационного исчисления на множестве всех непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot) : \overline{\Pi}_T \to R$

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\bar{t}} H^*(x(\tau), \dot{x}(\tau))d\tau \mapsto \max \tag{18}$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_1(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_1 = G_+; \tag{19}$$

$$x_2(0) = -1, \quad x_2(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_2 = G_- \tag{20}$$

В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для задачи (1)-(3) выполнены условия* **A**, **B1**, **B2**. *Рассмотрим функцию $u(t, x), (t, x) \in \Pi_T$, совпадающую с функцией (12) в области $\Omega_0 = G_0$. Определим функцию для $(t_*, x_*) \in G_+,\ x_* < 1,$ следующим образом*

$$u(t_*, x_*) = u_0(1) + \int\limits_0^{t_*} \big[p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]d\tau, \tag{21}$$

где $x(t) = x^+(t, p_0(t_*, x_*)),\ p(t) = p^+(t, p_0(t_*, x_*))$ является единственным решением вариационной задачи (18), (19). Положим

$$u(t_*, 1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t_*, \quad 0 \leqslant t_* \leqslant T.$$

Определим функцию для $(t_*, x_*) \in G_+-,\ x_* > -1,$

$$u(t_*, x_*) = u_0(-1) + \int\limits_0^{t_*} \big[p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))\big]d\tau, \tag{22}$$

где $x(t) = x^-(t, p_0(t_*, x_*)),\ p(t) = p^-(t, p_0(t_*, x_*))$ – единственное решение вариационной задачи (18),(20). Положим

$$u(t_*, -1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t_*, \quad 0 \leqslant t_* \leqslant T.$$

Построенная таким образом функция $u(t, x),\ (t, x) \in \overline{\Pi}_T$ удовлетворяет определению 1.

3. Глобальное обобщенное решение

Определение 2. *Непрерывная функция $u : [0,\infty) \times [-1,1] \to R$ называется глобальным обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и если для любого положительного T сужение этой функции на область $\overline{\Pi}_T$ удовлетворяет определению 1.*

Пусть задано значение $y \in [-1;1]$. Определим значение $T^*(y)$ так, что на интервале $[0, T^*(y))$ существует непродолжимое вправо решение характеристической системы (5),(6). Опираясь на свойства решений системы (5),(6), для $t \geqslant T^*(y)$ определим непрерывные продолжения фазовых компонент характеристик следующим образом.

$$x(t,y) = \begin{cases} -1, & \text{если } p(0,y) > 0 \\ \ \ 1, & \text{если } p(0,y) < 0. \end{cases}$$

Предположим, что для определенных таким образом функций выполнено условие

A1. Для всех $y \in [-1,1],\ \ t \geqslant 0$

$$-1 \leqslant x^-(t) = x(t,-1) \leqslant x(t,y) \leqslant x(t,+1) = x^+(t) \leqslant 1.$$

В [9] доказана

Теорема 3. *Пусть для задачи (1)-(3) выполнены условия* **A1**, **B1**, **B2**. *Тогда существует глобальное обобщенное решение этой задачи.*

Можно получить также другие достаточные условия существования глобального решения.

Теорема 4. *Пусть для задачи (1)-(3) выполнены условия* **B1**, **B2** *и следующее условие на производную начальной функции*

B3. $u_0'(1) \leqslant u_0'(y) \leqslant u_0'(-1), /, y \in [-1;1]$. *Тогда существует глобальное обобщенное решение этой задачи.*

Доказательство. Используя свойствах решений характеристической системы (5),(6), можно показать, что из набора условий **B1**, **B3** следует выполнение условия **A1**, и таким образом, выполнены условия теоремы 3, при которых глобальное решение существует.

3.1. Поведение глобального решения при больших значениях времени

Во многих работах (см., например, обзор в [8]) исследовалась асимптотика вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби, получены условия равномерной сходимости решения к функции вида $v(x)+ct$. В этих условиях существенными являются коэрцитивность и строгая выпуклость гамильтониана по импульсной переменной.

Рассмотрим поведение глобального решения задачи (1)-(3) при больших значениях t. Заметим, что в открытой области, ограниченной графиками продолженных для всех $t > 0$ фазовых компонент $x^-(t)$ и $x^-(t)$ характеристик, по построению глобальное решение $u(t,x)$ совпадает с вязкостным.

Если существуют константа c и функция $v(x)$ такие, что $u(x,t) - v(x) - ct \to 0, \quad t \to 1, x \in [-1;1]$, они должны удовлетворять уравнению

$$H(x, Dv(x)) = c, \quad x \in (-1;1). \tag{23}$$

Пусть функция фитнеса постоянна, $f(x) = f, f \in R, x \in [-1; 1]$. Тогда уравнение (23) выполняется только в случае, когда $Dv(x) = 0$, $x \in (-1; 1)$, то есть когда фунция $v(x) = v$ постоянна. При этом $c = -f$. Таким образом, если для глобального решения существует асимптотика, она имеет вид $-ft + v$. Но эта линейная функция для всех $v \in R$ отличается от линейных функций $u(t, -1)$ и $u(t, 1)$, с которыми глобальное решение совпадает на границе фазовых ограничений. Таким образом, в общем случае для глобального решения не существует асимптотики вида $v(x) + ct$.

4. Заключение

В работе введено определение глобального непрерывного обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом и фазовыми ограничениями, возникающего в модели Кроу-Кимуры молекулярной эволюции. Получены достаточные условия существования такого решения, рассмотрено поведение решения при больших значениях t, показано, что решение не имеет асимптотики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00074а).

Список литературы

1. Saakian, D.B., Rozanova, O., Akmetzhanov, A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, No. 4, 041908.
2. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
3. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, Вып. 2. С. 191-208.
4. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. Построение обобщенного решения уравнения, сохраняющего тип Беллмана в заданной области фазового пространства // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 243-256.
5. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, Вып. 1. С. 220-235.
6. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, No. 1. P. 1–42.
7. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, No. 2. P. 643-683.
8. Ichihara N., Ishii H. The large-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations on the real line // Methods and Applications of Analysis. 2008. Vol. 15, No. 2. P. 223-242.
9. Subbotina N.N., Shagalova L.G. The study of evolution in the Crow–Kimura molecular genetics model using methods of calculus of variations // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1907, No. 1, 020001.