УДК 519.245

МЕТОДЫ АДАПТИВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

О.А. Степанов
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30
E-mail: soalax@mail.ru

А.В. Моторин
АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Университет ИТМО
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30
E-mail: motorin.a@mail.ru

Ключевые слова: неопределенность моделей, адаптивное оценивание, алгоритм, навигационные приложения.

Аннотация: Представлен краткий обзор современного состояния в области построения адаптивных алгоритмов обработки измерительной информации при решении задач оценивания сигналов при наличии неопределенностей описания самих сигналов и погрешностей их измерений. С таким задачами нередко приходится сталкиваться в навигационных приложениях. Обсуждаются два основных подхода к решению задачи адаптивного оценивания. Один из них нацелен на решение параметрической задачи построения фильтров в предположении наличия так называемой обучающей выборки. В другом - предполагается решение одновременной задачи оценивания самого сигнала и идентификации структуры моделей и ее параметров, используемых для описания сигнала и погрешностей измерения. В докладе такой подход рассматривается более подробно. Формулируются постановка задачи и описывается алгоритм ее решения. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность использования предложенного адаптивного алгоритма.

1. Введение

В настоящее время при обработке информации в интегрированных навигационных системах широкое распространение получили алгоритмы стохастической фильтрации, в частности, фильтр Калмана и различные его модификации. Все большее применение получают более сложные, алгоритмы, основанные, например, на методе Монте-Карло и методе точечных масс, что позволяет учесть нелинейный характер новых задач. Построение алгоритмов стохастической фильтрации опирается на предположение о случайном характере погрешностей навигационных датчиков и средств коррекции, что, в свою очередь, требует задания их моделей в виде случайных процессов или последовательностей. Точность задания таких моделей напрямую влияет на точность получаемых оценок. Однако на практике, они, как правило, неизвестны или известны не точно, что является одним из основных ограничений к использованию методов оптимальной фильтрации и сглаживания. В тоже время, это делает актуальным создание робастных (гарантирующих), устойчивых к неточностям задания модели, и адаптивных, нацеленных на определение моделей и параметров сигналов, алгоритмов.

Задача адаптивного оценивания сигнала в условиях априорной неопределенности в настоящей работе рассматривается в рамках стохастического подхода в предположении, что полезный сигнал и помеха представляют собой случайные процессы или последовательности, свойства или статистические характеристики которых известны не точно. При этом предполагается наличие как параметрической неопределенности, при которой модель, описывающая используемые процессы, задана с точностью до неизвестных параметров, так и структурной – когда неизвестны и сама модель, и конкретизирующие ее параметры. Такие задачи зачастую возникают на практике при построении алгоритмов обработки навигационной информации, методам решения которых и посвящена настоящая работа.

2. Методы решения задачи адаптивного оценивания

Анализ современного состояния в области адаптивных методов обработки показывает, что здесь можно выделить два основных направления развития.

Одно из них опирается на работу [1]. В рамках этого направления не предполагается решение задачи идентификации сигналов и погрешностей их измерения, а сразу решается, как правило, параметрическая задача построения фильтра. Методам построения таких фильтров посвящена обширная литература [2-6]. Весьма существенным здесь является предположение о наличии так называемой обучающей выборки в виде набора пар входных (измеренных) и выходных (эталонных) данных, представляющих собой ожидаемые результаты, которые должны быть получены при обработке измерений. Основной целью исследований в этой области является разработка алгоритмов отыскания неизвестных параметров фильтров. При этом зачастую самим задачам оценивания уделяется значительно меньшее внимание. Такой подход, во многом совпадает с подходом, основанным на использовании нейронных сетей, в которых в качестве адаптивного фильтра выступает нейронная сеть той или иной структуры [3, 7, 8]. Одна из основных проблем, возникающих в рамках указанного направления, связана с выбором конкретного фильтра или типа нейронной сети. Не вполне ясен и вопрос о возможности идентификации структуры оцениваемых сигналов и (или) погрешностей их измерения. В целом, можно констатировать, что подход, предполагающий использование обучающей выборки при построении адаптивных алгоритмов, трудно применять в задачах, связанных с проектированием навигационных систем, поскольку в этих задачах, такая выборка, как правило, отсутствует.

Второе направление развития методов обработки в условиях априорной неопределенности касается традиционных задач фильтрации, т.е. обработки измерений с целью оценивания полезного сигнала [9-15]. Специфика решения задачи фильтрации в рассматриваемой ситуации заключается в том, что необходимая для построения фильтра априорная информация отсутствует. Получение этой информации осуществляется непосредственно в процессе решения задачи с использованием исходных измерений, путем оценивания помимо полезного сигнала еще и неизвестных параметров, определяющих его свойства. Именно в этой области накоплен наибольший опыт применения аппарата теории нелинейной фильтрации, как в теоретическом плане, так и в плане применения разрабатываемых методов для решения задач комплексной обработки измерительной, в частности, навигационной информации. Так, здесь нередко рассматриваются задачи фильтрации при неизвестных уровнях порождающих или измерительных шумов [16-21]. Широкое применение на практике получили алгоритмы, в которых подстройка коэффициента усиления в линейном фильтре Калмана осуществляется на основе анализа свойств невязки. Эти алгоритмы обычно называются адаптивными фильтрами Калмана [19-22].

Для строгого решения задачи оценивания при наличии неопределенностей в моделях она может быть сформулирована в байесовская постановке. Это открывает возможности синтеза эффективных методов решения задач с применением получающих активное развитие методов и алгоритмов нелинейной фильтрации [15, 22]. Наиболее сложная ситуация складывается в тех случаях, когда неопределенность связана не только с наличием неизвестных параметров, но и с неизвестной структурой, как сигнала, так и ошибок измерения. В работах [23-25] сформулирована и решена такая задача применительно к идентификации моделей погрешностей. Специфика задачи идентификации заключается в том, что при ее решении не предполагается наличие подлежащего определению полезного сигнала и в качестве измерений выступают реализаций самих погрешностей. В настоящей работе подход, рассмотренный в работах [23-25], обобщается на случай, когда измерения содержат сумму полезного сигнала и погрешности измерения при наличии параметрических и структурных неопределенностей их моделей.

Заметим, что близкие по смыслу постановки рассматривались и при построении алгоритмов решения задач траекторного слежения, определения маневра цели, визуального слежения; определения дороги, по которой двигается автомобиль, разрешения неоднозначности спутниковых фазовых измерений, контроля целостности и диагностики навигационных систем и в ряде других приложений [26-33]. Успех в решении задач такого рода в значительной степени обусловлен развитием методов нелинейной фильтрации [34-39]. Именно в такой постановке и рассматривается далее в настоящей работе задача адаптивного оценивания, связанная с обработкой навигационной информации.

3. Постановка и решение адаптивной задачи оценивания в рамках байесовского подхода

Будем полагать, что измерению доступна реализация $y(t)$, которая может быть представлена в виде суммы независимых составляющих:

(1) $$y(t) = u(t) + \varepsilon(t),$$

где $u(t)$ – полезный сигнал, $\varepsilon(t)$ – погрешности измерения. В (1) функции $u(t)$ и $\varepsilon(t)$ представляют собой случайные процессы, свойства которых известны не полностью. При обработке навигационной информации в качестве измерений могут выступать показания инерциальных датчиков, навигационных систем и средств коррекции различного типа. В работах [23-25] рассмотрена задача идентификации моделей погрешностей навигационных измерителей. Ее особенность заключается в том, что в качестве измерений выступают реализации погрешностей и при этом, цель решения задачи заключается в определении свойств погрешностей. Вместе с тем описанный в указанных работах подход легко обобщается и на случай, когда в составе измерений появляется подлежащий оцениванию полезный сигнал.

Для формализации алгоритма решения приведем постановку такой задачи, которая будет основана на описании альтернативных моделей в виде набора формирующих фильтров (ФФ), заданных с точностью до неизвестных параметров. Пусть задан набор гипотез h_k, $k = \overline{1...K}$ о возможных видах ФФ:

(2) $$\begin{aligned} x_i^k &= \Phi_i^k(\theta^k) x_{i-1}^k + \Gamma_i^k(\theta^k) w_i^k, \\ \theta_i^k &= \theta_{i-1}^k = \theta^k, \end{aligned}$$

(3) $$y_i = H_i^k(\theta^k)x_i^k + \Psi_i^k(\theta^k)v_i^k,$$

где $i = 1,2...$ – номер измерения; $x_i^k = \left[\left[\left(x_i^k\right)^I\right]^T, \ \left[\left(x_i^k\right)^{II}\right]^T\right]^T$ – вектор состояния для гипотезы h_k, включающий в себя подвекторы, с помощью которых описываются полезный сигнал $u^k(t_i) = \left(H_i^k(\theta^k)\right)^I \left(x_i^k\right)^I + \chi_i^k(\theta^k)$ и небелошумные составляющие погрешностей $\tilde{y}^k(t_i) = \left(H_i^k(\theta^k)\right)^{II} \left(x_i^k\right)^{II}$; θ^k – случайный вектор неизвестных параметров с заданной начальной ф.п.р.в. $f_{\theta^k}(\theta^k)$; $\chi_i^k(\theta^k)$ – нелинейная функция этого параметра; $\Phi_i^k(\theta^k)$, $\Gamma_i^k(\theta^k)$, $H_i^k(\theta^k) = \left[\left(H_i^k(\theta^k)\right)^I \quad \left(H_i^k(\theta^k)\right)^{II}\right]$, $\Psi_i^k(\theta^k)$ – известные матрицы ФФ, характеризующие структуру модели для этой гипотезы; w_i^k и v_i^k – p^k и m^k-мерные белошумные центрированные гауссовские последовательности. Набор гипотез трактуется как дискретная случайная величина, имеющая конечное множество значений $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \ldots h_k, ..h_K)$.

В этих условиях требуется определить номер гипотезы, максимизирующей апостериорную вероятность $\Pr(\mathbf{H} = h_k / Y_i)$, и найти соответствующие этому номеру оптимальные байесовские оценки векторов x_i^k, θ^k. Именно таким образом и решается задача адаптивного оценивания в условиях неопределенных моделей сигнала и помехи.

Алгоритм решения задачи такого типа представлен в работах [23-25]. Он включает этап инициализации и рекуррентную процедуру расчета вероятностей моделей и оценок их параметров в каждый момент времени. На этапе инициализации выбирается набор из K гипотез и задаются аппроксимации ф.п.р.в. вектора θ^k для каждой из них в виде

(4) $$f_{\theta^k}\left(\theta^k / Y_i, \mathbf{H} = h_k\right) \approx \sum_{j=1}^{M_k} \mu_i^{kj} \delta\left(\theta^k - \theta^{kj}\right),$$

где θ^{kj}, $j = \overline{1...M_k}$ – узлы сетки фиксированных значений вектора θ^k при фиксированной гипотезе h_k, а μ_i^{kj} коэффициенты аппроксимации ф.п.р.в. Для каждой гипотезы и каждого значения θ^{kj} формируется фильтр Калмана, таким образом составляя банк фильтров. На каждом шаге рекуррентной процедуры, в банке фильтров вычисляются частные прогнозы и оценки вектора состояния $\hat{x}_{i/i-1}^{kj}$, $\hat{x}_i^{kj}$ и соответствующие матрицы ковариаций погрешностей оценивания $P_{i/i-1}^{kj}$, P_i^{kj}. Далее с их использованием рассчитываются значения гауссовской функции правдоподобия

(5) $$f_{y_i}\left(y_i / Y_{i-1}, \mathbf{H} = h_k, \theta^k\right) \approx N\left(y_i; H_i^{kj}\hat{x}_{i/i-1}^{kj} + \chi_i^k(\theta^{kj}), \Lambda_i^{kj}\right),$$

где $H_i^{kj}\hat{x}_{i/i-1}^{kj}$ – математическое ожидание, а $\Lambda_i^{kj} = H_i^{kj}P_{i/i-1}^{kj}(H_i^{kj})^T + \Psi_i^{kj}(\Psi_i^{kj})^T$ – матрица ковариаций. Полученные значения функций правдоподобия используются для рекуррентного расчета коэффициентов μ_i^{kj} аппроксимации апостериорной ф.п.р.в. (4):

(6) $$\mu_i^{kj} = \frac{\mu_{i-1}^{kj} f_{y_i}\left(y_i / Y_{i-1}, \mathbf{H} = h_k, \theta^{kj}\right)}{\sum_{j=1}^{L} \mu_{i-1}^{kj} f_{y_i}\left(y_i / Y_{i-1}, \mathbf{H} = h_k, \theta^{kj}\right)}.$$

Оценки векторов θ^k и x_i^k соответствующие матрицы ковариаций погрешностей оценивания, рассчитываются м использованием μ_i^{kj} согласно правилам вычисления оптимальных байесовских оценок (формулы (7), (8)):

(7) $$\hat{\theta}_i^k(Y_i) = \sum_{j=1}^{M_k} \mu_i^{kj} \theta^{kj}, \; \hat{x}_i^k(Y_i) = \sum_{j=1}^{M_k} \mu_i^{kj} \hat{x}_i^{kj},$$

(8) $$P_i^{\theta k}(Y_i) = \sum_{j=1}^{M_k} \mu_i^{kj} \theta^{kj} (\theta^{kj})^T - \hat{\theta}_i^k \hat{\theta}_i^{k\mathrm{T}},$$
$$P_i^{xk}(Y_i) = \sum_{j=1}^{M_k} \left[\mu_i^{kj} \left(\hat{x}_i^{kj} (\hat{x}_i^{kj})^T + P_i^{kj} \right) \right] - \hat{x}_i^k \left(\hat{x}_i^k \right)^T.$$

Апостериорные вероятности каждой из гипотез также рассчитываются с использованием функций правдоподобия (5) и коэффициентов (6). При этом гипотеза считается определенной верно при достижении апостериорной вероятностью заданного порогового значения, близкого к единице. Отметим, что алгоритм является адаптивным не только по отношению к параметрам, но и к структуре модели. Таким образом, решается совместная задача идентификации и адаптивного оценивания модели в целом.

Так как получаемое решение при увеличении числа узлов сетки в (4) стремится к оптимальному байесовскому решению, рассмотренный алгоритм может быть использован для оценки потенциальной точности и анализа эффективности субоптимальных алгоритмов.

3. Пример

С целью иллюстрации применения описанного адаптивного алгоритма рассмотрим классическую задачу определения фазы гармонического сигнала на фоне помехи

(9) $$y(t_i) = A\cos\left(\omega t_i + \mathrm{f}\right) + \varepsilon(t_i),$$

где A – амплитуда, ω – частота, f – фаза полезного сигнала. К подобной постановке можно свести ряд задач оценивания, с которыми приходится сталкиваться в навигационных приложениях. Одной из них является задача определения курса на неподвижном основании с использованием показаний вращающегося в горизонтальной плоскости датчика угловой скорости (ДУС) [40]. В этом случае выходной сигнал ДУС может быть представлен в виде (9), где $A = \tilde{\Omega} = \Omega\cos\varphi$ – известная проекция скорости вращения Земли на плоскость горизонта на широте φ, ω – известная частота вращения платформы f=K – искомый курс, а $\varepsilon(t)$ – погрешность ДУС. Обычно для погрешности ДУС вводится модель в виде суммы дрейфа, описываемого винеровским процессом, постоянной и белошумной составляющих, т.е.

$$\xi_i = \xi_{i-1} + \sigma_w w_i,$$
$$d_i = d_{i-1} = d,$$
$$\varepsilon(t_i) = d_i + \xi_i + v_i,$$

где ξ_i – дрейф ДУС; σ_w – коэффициент, определяющий СКО порождающего шума дрейфа; d – постоянная составляющая погрешности, v_i – белый шум измерений.

Вследствие неопределенности интенсивности порождающего шума дрейфа в модели погрешности ДУС, такую задачу можно рассматривать как адаптивную задачу оценивания (2), (3), где $u(t_i)=\chi_i(\theta)=A\cos(\omega t_i+K)$, $\theta=[K \quad \sigma_w]^T$, $x_i=(x_i^k)^{II}=[d \quad \xi_i]^T$, соответственно $\tilde{y}_i=d+\xi_i$. Заметим, что искомый курс K здесь входит в вектор неизвестных параметров и оценивается совместно с неизвестной величиной σ_w.

Пример реализации измерений и результаты решения алгоритма приведены на рис. 1. Расчеты проводились при следующих предположениях: интервал дискретизации 0,01 с; СКО дискретного белого шума измерений – 0,002 град/с; начальное СКО постоянной составляющей 0,03 град/с; σ_w=0,0001 град/с.

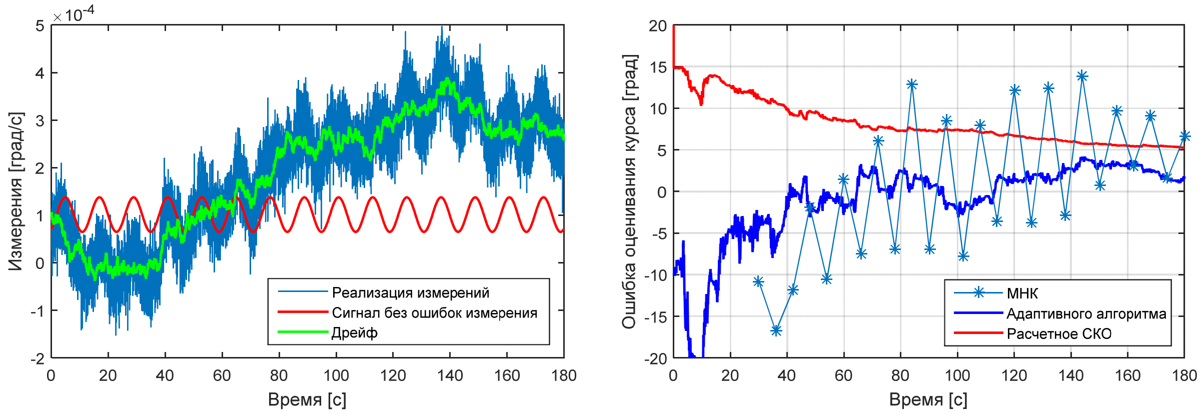

Рис. 1. Слева: реализации измерений (синий), сигнала без ошибок измерения (красный) и дрейфа. Справа: ошибка оценки курса с использованием МНК (голубой); адаптивного алгоритма (синий); расчетное значение СКО, выработанное в адаптивном алгоритме (красный).

Из графиков видно, что погрешность оценивания уменьшается и при этом расчетное значение СКО соответствует действительным значениям ошибок. Для сравнения на рис. 1 показаны результаты решения этой задачи с использованием алгоритма, основанного на методе наименьших квадратов (МНК) [40, 41], который, в этом случае, проигрывает по точности и скорости сходимости оценки адаптивному алгоритму. Проведенные исследования, однако, показали, что в случае, когда дрейф ДУС может быть описан стационарным процессом, субоптимальный алгоритм МНК практически не уступает по точности адаптивному и может использован для решения рассматриваемой задачи.

4. Заключение

Проведен обзор подходов, используемых при решении задач адаптивного оценивания и идентификации при обработке измерений в условиях априорной неопределенности в описании оцениваемых сигналов и погрешностей датчиков.

Предложена многоальтернативная модель измерений, основанная на описании оцениваемого сигнала и всех составляющих погрешности с помощью набора формирующих фильтров, заданных в пространстве состояний с точностью до неизвестных параметров, с целью ее использования в задачах адаптивного оценивания.

Предложен единый алгоритм решения задачи адаптивного оценивания полезного сигнала и идентификации структуры и параметров введенной модели, как совместной задачи распознавания гипотез и оценивания неизвестных параметров.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрена задача адаптивной фильтрации, решаемая при определении курса с использованием датчика угловой скорости, установленного на вращающемся основании.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-01101А

Список литературы

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь. 1989, 440 с.
2. Sayed A.H. Fundamentals of adaptive filtering. John Wiley and Sons, Inc., 2003. 1125 p.
3. Сергиенко А.Б. Алгоритмы адаптивной фильтрации: особенности реализации в MATLAB // ExponentaPro. Математика в приложениях. 2003. № 1. С. 18-28.
4. Zaknich A., Principles of adaptive filters and self-learning systems. Springer, 2005. 386 p.
5. Haykin S. Adaptive Filter Theory / 5-th ed. Boston: Pearson, 2014. 913 p.
6. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. Москва: Техносфера, 2013. 528 с.
7. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. М.-СПб., 2006.
8. Степанов О.А. Нейросетевые алгоритмы в задаче нелинейного оценивания. Взаимосвязь с байесовским подходом // Материалы докладов XI конференции молодых ученых «Навигация и управление движением». 2009. С. 39-65.
9. Mehra R.K. Approaches to adaptive filtering // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. Vol. 17, no. 5. P. 693-698.
10. Стратонович Р.Л. Принципы адаптивного приема. М.: Советское радио, 1973. 144 с.
11. Lainiotis D.G. Partitioning: A unifying framework for adaptive systems. I: Estimation. II: Control // IEEE Transactions. 1976. No. 8 (64). P. 1126-1140.
12. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984, 288 с.
13. Gustafson F. Adaptive Filtering and Change Detection. New York: Wiley, 2000.
14. Jwo D.J., Weng T.P. An adaptive sensor fusion method with applications in integrated navigation // The Journal of Navigation. 2008. Vol. 61. P. 705-721.
15. Sarkka S. Bayesian Filtering and Smoothing, Cambridge University Press, 2013.
16. Sage A.P., Husa G.W. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics // Proc. Joint Automatic Control Conference. 1969. P. 760-769.
17. Alspach D.A. Parallel filtering algorithm for linear systems with unknown time varying noise statistics // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. Vol. 19, No. 5. P. 552-556.
18. Bélanger P.R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process // Automatica. 1974. Vol. 10, No. 3. P. 267-275.
19. Yang Yuanxi, Gao Weiguang. An optimal adaptive Kalman filter // Journal of Geodesy. 2006. Vol. 80, No. 4. P. 177-183.
20. Ding W., Wang J., Rizos C. Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS Integration // The Journal of Navigation. 2007. Vol. 60. P. 517-529.
21. Dah-Jing Jwo, Mu-Yen Chen, Chien-Hao Tseng and Ta-Shun Cho. Adaptive and Nonlinear Kalman Filtering for GPS Navigation Processing // Kalman Filter Recent Advances and Applications / Victor M. Moreno and Alberto Pigazo (Eds). 2009.
22. Степанов О.А., Лян Цин. Анализ адаптивных фильтров в линейной стационарной задаче при неизвестных характеристиках шумов. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. № 6. Р. 113-129.
23. Stepanov O.A., Motorin A.V., Designing an error model for navigation sensors using the Bayesian approach // IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI), Sept. 14-16, 2015. San Diego, CA, USA. P. 54-58.
24. Stepanov O.A., Motorin A.V. Problem-oriented approach to identification of sensor error models and its application to navigation data processing // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 2830–2835.
25. Моторин А.В. Идентификация моделей погрешностей навигационных датчиков и средств коррекции методами нелинейной фильтрации Дисс. ... канд. техн. наук. СПб., 2017.
26. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Ярлыков М.С. (ред.) М.: Радиотехника, 2004. 505 с.
27. Белоглазов И.Н., Казарин С.Н. Совместное оптимальное оценивание, идентификация и проверка гипотез в дискретных динамических системах // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. С. 69-73.
28. Дмитриев С.П., Колесов Н.В., Осипов А.В. Информационная надежность, контроль и диагностика навигационных систем. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 207 с.
29. Дмитриев С.П., Степанов О.А. Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Радиотехника. 2004. № 7. С. 11-17.

30. Li X.R., Jilkov V. P. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2005. Vol. 41, No. 4. P. 1255-1321.
31. Бар-Шалом Я., Ли Х.-Р. Траекторная обработка. Принципы, способы и алгоритмы. Ч. 1, 2. М., 2011.
32. Ristic B., Farina A. Joint detection and tracking using multi-static doppler-shift measurements // Proc. ICASSP 2012. С. 3881-3884.
33. Chen Y., Jilkov V. P., Li X.R. Multilane-road target tracking using radar and image sensors // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2015. Vol. 51, No. 1. P. 65-80.
34. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.:ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
35. Bergman N. Recursive Bayesian Estimation. Navigation and Tracking Applications. Linkoping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 579. 1999.
36. Doucet A., Freitas D., Gordon N.J. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. New York: Springer, 2001. 581 p.
37. Simon D. Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, USA, 2006.
38. Степанов О.А., Торопов А.Б. Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 3324-3337.
39. Raol J.R., Gopalratnam G., Twala B. Nonlinear Filtering: Concepts and Engineering Applications. CRC Press, 2017. 581 p.
40. Yongjian Zhang, Bin Zhou, Mingliang Song, Bo Hou, Haifeng Xing and Rong Zhang. A Novel MEMS Gyro North Finder Design Based on the Rotation Modulation Technique // Sensors. 2017. Nay. 973.
41. Li Y., Wu W., Jiang Q., Wang J. A New Continuous Rotation IMU Alignment Algorithm Based on Stochastic Modeling for Cost Effective North-Finding Applications // Sensors. 2016. Dec. 2113.
42. Тупысев В.А. Использование винеровских моделей для описания уходов гироскопов и ошибок измерения в задаче оценивания состояния инерциальных систем // Гироскопия и навигация. 2002. №. 3 (38). С. 22-33.
43. Блажнов Б.А., Емельянцев Г.И., Драницына Е.В., Степанов А.П. О калибровке измерительного модуля прецизионной БИНС и построении связанного с ним ортогонального трехгранника // Гироскопия и навигация. 2015. № 1 (92). С. 36-48.