УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМ ПОТОКОМ

С.А. Загребина

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

Россия, 454080, Челябинск, Проспект Ленина ул., 78

E-mail: zagrebinasa@susu.ru

А.С. Конкина

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

Россия, 454080, Челябинск, Проспект Ленина ул., 78

E-mail: konkinaas@susu.ru

Ключевые слова: уравнения Осколкова; геометрический граф; задача Коши; транспортные потоки.

Аннотация: Для моделирования транспортного потокабудем рассматривать уравнения Осколкова на графе, которое является обобщением системы Навье-Стокса. Подход,в основе которого лежит система Навье-Стокса, описан в работах школы академика А.Б. Куржанского, где транспортный поток уподобляется несжимаемой жидкости, и, как следствие, рассматриваются гидродинамические модели. Для рассматриваемой модели Осколкова поставлено неклассическое многоточечное начально-конечное условие учитывающее проекции дорожного движения, фикисируемое камерами.

1. Построение математической модели

Рассмотрим конечное упорядоченное множество конечных связных ориентированных графов $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{V_j\}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_k\}$ – множество ребер, причем каждому ребру E_k каждого графа $\mathbf{G}$ ставится в соответствие два числа l_k и $b_k \in \mathbb{R}_+$, отвечающие его "длине"и "ширине"соответственно. (Безусловно, в контексте математической модели величины l_k и b_k безразмерны, однако для наглядности удобно представлять, что l_k измеряется в линейных метрических единицах, например, километрах или милях, а вот b_k равно количеству полос движения на проезжей части в одну сторону). На каждом ребре E_k каждого графа $\mathbf{G}$ зададим линейное уравнение Осколкова [1]

(1) $$\lambda u_{kt} - u_{ktxx} = \nu u_{kxx} + f_k.$$

Здесь $u_k = u_k(x,t)$, $x \in [0, l_k]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$ характеризует среднюю скорость транспортного потока на E_k; $f_k = f_k(x,t)$, $(x,t) \in [0, l_k] \times \overline{\mathbb{R}}_+$, отвечает той (усредненной) силе, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств. Коэффициенты λ равны единице поделенной на коэффициент ретардации, который может принимать отрицательные значения, поэтому считаем $\lambda \in \mathbb{R}$. Коэффициент ν отвечает за вязкость транспортного потока, т.е. за его способность "гасить" резкие перепады скорости [2]; по смыслу $\nu \in \mathbb{R}_+$.

Теперь обсудим условия, связывающие решения различных уравнений (1) в вершинах графа. Поскольку в данной модели вершины ассоциированы с перекрестками, то условия на скоростной режим при проезде перекрестка безусловно очень важны. Первым рассмотрим *условие непрерывности*

$$u_k(0,t) = u_m(l_m,t),\ \forall E_k \in E^{\alpha}(V_j),\ \forall E_m \in E^{\omega}(V_j). \tag{2}$$

Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_j)$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}$, выходящих из вершины V_j (входящих в вершину V_j). В контексте нашей модели условие (2) означает, что скорость въезда транспортного средства на перекресток должна равняться скорости съезда. (Это условие совершенно естественно, иначе возможны либо заторы на перекрестках, либо ДТП). Кроме (2) нам потребуется *условие баланса потоков*

$$\sum_{E_k \in E^{\alpha}(V_j)} b_k u_{kx}(0,t) - \sum_{E_m \in E^{\omega}(V_j)} b_m u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{3}$$

которое требует, чтобы количество выезжающих на перекресток транспортных средств было равно количеству съезжающих. Особо отметим, что (2) существует только если

$$\mathbf{P}\left\{(E^{\alpha}(V_j) \neq \varnothing) \bigwedge (E^{\omega}(V_j) \neq \varnothing)\right\} = 1. \tag{4}$$

Что же касается (3), то оно выполняется и при нарушении (4). Например, в какую-либо вершину графа входит (или выходит из нее) только одно ребро. Тогда (3) в этой вершине превращается в однородное условие Неймана, а (2) в силу запрета (4) попросту исчезает.

Условия (2) – (4) имеют место в тех вершинах графа, которые ассоциированы с нерегулируемыми перекрестками. Уравнение (1) вместе с условиями (2)-(4), где свободный член $f_k = f(t)$ отвечает детерминированному внешнему воздействию, удается редуцировать к уравнению соболевского типа [3]

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{5}$$

В данной заметке рассмотрим многоточечное начально-конечное условие [3] для уравнения (5). Возьмем $\tau_z \in \overline{\mathbb{R}_+}$, такие что $\tau_{z-1} < \tau_z$ для $z = \overline{1,n}$. Можно дополнить условием

$$P_z(u(\tau_z) - u_z) = 0,\ z = \overline{1,n}. \tag{6}$$

где P_z – *относительно спектральные проекторы* [4].

2. Основной результат

В докладе предполагается, помимо аналитического решения представление результатов вычислительного эксперимента. Для эксперимента возьмем один подграф. Введем множество

$$\mathbf{L_2}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_k, \dots) : g_k \in L_2(0, l_k)\}, \tag{7}$$

которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g,h\rangle = \sum_{E_k\in\mathcal{E}} b_k \int\limits_0^{l_k} g_k(x)h_k(x)\,dx. \tag{8}$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots) : u_k \in W_2^1(0,l_k), \text{ и выполнено (2)}\}. \tag{9}$$

Множество $\mathfrak{U}$ является гильбертовым пространством со скалярным призведением

$$[u,v] = \sum_{E_k\in\mathcal{E}} d_k \int\limits_0^{l_k} (u_{kx}v_{kx}(x) + u_kv_{kx}(x))\,dx. \tag{10}$$

и нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_k\in\mathcal{E}} d_k \int\limits_0^{l_k} (u_{kx}^2(x) + u_k^2(x))\,dx. \tag{11}$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0,l_k)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулой

$$\langle Au,v\rangle = \sum_{E_k\in\mathcal{E}} b_k \int\limits_0^{l_k} (u_{kx}(x)v_{kx}(x) + au_k(x)v_k(x))\,dx, \tag{12}$$

где $a \in \mathbb{R}_+$, $u,v \in \mathfrak{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{U}$. Поскольку

$$|\langle Au,v\rangle| \leqslant C_1\|u\|_{\mathfrak{U}}\|v\|_{\mathfrak{U}} \tag{13}$$

в силу неравенства Коши – Буняковского и

$$C_2\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \leqslant \langle Au,u\rangle \leqslant C_3\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \tag{14}$$

при всех $u,v \in \mathfrak{U}$ и некоторых $C_1,C_2,C_3 \in \mathbb{R}_+$, то линейный оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ непрерывен и инъективен. Кроме того, из первой оценки (14) вытекает сюръективность сопряженного оператора $A^* : \mathfrak{F}^* \to \mathfrak{U}^*$. В силу рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ и самосопряженности оператора A получаем, что оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$. Поскольку вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

Теперь фиксируем $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A,\ M = \nu(a\mathbb{I} - A). \tag{15}$$

Из сказанного следует

Теорема 1. *Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$.*

Из теоремы 1 вытекает, что оператор L – фредгольмов, причем $\ker L = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(L)$. Пусть $\{\lambda_r\}$ – собственные значения оператора A, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности; а $\{\varphi_r\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ функции. Построим проектор и разрешающую группу

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_r=\lambda-a} \langle\,\cdot\,,\varphi_r\rangle\varphi_r, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases} \qquad U^t = {\sum_{r=1}^{\infty}}' e^{\mu_r t}\langle\,\cdot\,,\varphi_r\rangle\varphi_r, \tag{16}$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов ряда с номерами r такими, что $\lambda_r = \lambda - a$; $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$–скалярное произведение в $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \{\mu_r = \frac{\nu(a-\lambda_r)}{\lambda-(a+\lambda_r)},\ r \in \mathbb{N}\}. \tag{17}$$

Лемма 1. *Пусть параметры $\nu \in \mathbb{R}_+$,$\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Выберем $\sigma^L_z(M)$, $z=\overline{0,n}$, построим проекторы

$$P_z = \sum_{\mu_r\in\sigma_z^L(M)} \langle\cdot,\varphi_r\rangle\varphi_r,\ \ z=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Возьмем $\tau_z \in \overline{\mathbb{R}_+}$, такие что $\tau_{z-1} < \tau_z$ для $z=\overline{1,n}$, $u_z \in \mathfrak{U}$, $z=\overline{1,n}$, и рассмотрим задачу (5), (6), где операторы L и M из (15), а проекторы P_z, $z=\overline{1,n}$, из (18).

Лемма 2. *Пусть параметры $\lambda,\nu \in \mathbb{R}_+$, тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Теорема 2. *При любых λ,$\nu$$\in$$\mathbb{R}_+$, $u_z \in \mathfrak{U}$, $z=\overline{1,n}$, задача (1)-(2), (6) для уравнений (5) имеет единственное решение $u \in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$.*

Список литературы

1. Zagrebina S.A., Konkina A.S. Traffic management model // 2016 and International Conferenceon Industrial Engineering, Applications and Manufacturing ICIEAM 2016. Proceedings. 7911712.
2. Gorodokin, V., Almetova, Z., Shepelev, V. . Algorithm of signalized crossroads passage within the range of permissive-to-restrictive signals exchange // Paper presented at the Transportation Research Procedia. 20225-230. 10.1016/j.trpro.2017.01.059
3. Свиридюк Г.А., Загребина С.А., Конкина А.С. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения // Вестник ЮУрГУ. Сения: математическое моделирование и программирование. 2015. Vol. 8, No. 3, C. 148-154. DOI: 10.14529/mmp1503010
4. Zagrebina S.A., Konkina A.S. The multipoint initial-final value condition for the Navier-Stokes linear model // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2015. Vol. 8, No. 1. P. 132–136. DOI: 10.14529/mmp150111