УДК 532.5.59

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СОСУДА С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

**С.А. Кумакшев**
*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*
Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1
E-mail: kumak@ipmnet.ru

**Ключевые слова:** тяжелая жидкость, малые колебания, управление.

**Аннотация:** В линейном приближении исследуется задача о малых колебаниях тяжелой жидкости со свободной поверхностью в подвижном сосуде (например, танкеры, цистерны, топливные баки, технологические объекты). Разработан новый метод конструктивного решения задачи о корректном приведении глубокого прямоугольного сосуда (контейнера) с относительно покоящейся тяжелой жидкостью в состояние поступательного движения с требуемой скоростью. Во избежание резонансных эффектов с целью не возбуждения внутренних волн предлагается и реализуется алгоритм квазистационарного существенного изменения скорости сосуда с жидкостью как целого. В конце процесса заданного изменения скорости оцениваются возбужденные внутренние колебания жидкости в зависимости от величины, длительности и степени гладкости по В.А. Стеклову управляющего воздействия (ускорения).

## 1. Постановка задачи.

Для описания состояния несжимаемой однородной жидкости в горизонтально перемещаемом сосуде вводится потенциал $\varphi = \varphi(t, x, y)$ относительных скоростей, где $t$ — время, $x$, $y$ — естественные декартовые координаты в вертикальной плоскости, связанные с нижней ($y = 0$, дном) и левой ($x = 0$, вертикальной) стенкой; торцевые эффекты не учитываются. Согласно [1–3] имеет место нестандартная начально-краевая в прямоугольнике (плоская) задача линейного приближения

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0, \quad 0 < x < l, \quad \varphi(0, x, y) = \text{const}; \quad \varphi'_x \equiv 0, \quad x = 0, l; \quad \varphi'_y \equiv 0, \quad y = 0;\\ (\ddot{\varphi} + g\varphi'_y)|_{y=h} = x\gamma(t), \quad \gamma = \ddot{c}, \quad t \geqslant 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\Delta$ — двумерный оператор Лапласа, $g$ — ускорение сил тяжести.

Выражение первого приближения для формы поверхности жидкости имеет вид

$$\begin{gathered}\eta(t, x) = h - \frac{\dot{c}(t)}{g}x + \frac{1}{g}\dot{\varphi}(t, x, h), \quad 0 \leqslant x \leqslant l;\\ \dot{\eta} = v_y = -\varphi'_y(t, x, h), \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty.\end{gathered} \tag{2}$$

Из выражений (2) следует соответствующее граничное условие (1).

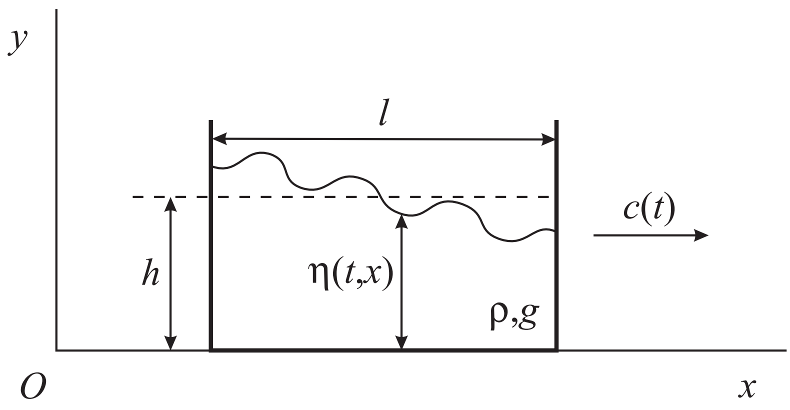


Рис. 1. Геометрия задачи

## 2. Приближенное решение

Для приближенного решения используется модальный подход. Потенциал скоростей [1,2]:

$$\varphi(t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_n(t)\cos\pi n\frac{x}{l}\left(\operatorname{ch}\pi n\frac{y}{l}\Big/\operatorname{ch}\pi n\frac{h}{l}\right), \tag{3}$$

где $\Theta_n$ — коэффициенты Фурье, подлежащие определению из условий задачи управления (1) с конечными условиями $c(T)=c^*$, $w(T)=0$, $\varphi(T,x,y)=\mathrm{const}$. Представление (3) приводит к счетной системе задач Коши для $\Theta_n$

$$\begin{gathered}\ddot{\Theta}_n+\omega_n^2\Theta_n=\alpha_n\gamma,\quad \alpha_0=\frac{l}{2},\quad \alpha_n=-\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2 l\sin^2\pi\frac{n}{2};\\ \omega_0^2=0,\quad \omega_n^2=\pi n\frac{g}{l}\operatorname{th}\pi n\frac{h}{l},\quad n\geqslant 1;\\ \Theta_0(0)=\varphi_0(0),\quad \dot{\Theta}_0(0)=\dot{\varphi}_0(0);\quad \Theta_n(0)=\dot{\Theta}_n(0)=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Требуется выбором финитной (достаточно гладкой) функции $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, изменить на величину $\delta c=c^*-c^0$ скорость $c(t)$ сосуда. Режим управления должен приводить к исчезающе малым относительным колебаниям нечетных мод, $n=2k-1$, жидкости. Колебания четных мод $n=2k$ в сосуде не возбуждаются посредством продольных (вдоль оси $Ox$) воздействий.

Представим решение счетной системы задач Коши (4) (учтем, что $w(0)=0$)

$$\begin{gathered}\Theta_n(t)=\frac{\alpha_n}{\omega_n}\int_0^t s_n(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau=\alpha_n\int_0^t c_n(t-\tau)w(\tau)d\tau,\\ s_n\equiv\sin\omega_n t, c_n(t)\equiv\cos\omega_n t, 0\leqslant t\leqslant T;\quad \gamma(t)\equiv 0, w(t)\equiv 0, t\leqslant 0, t\geqslant T.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь величина интервала $T\gg T_1=2\pi/\omega_1$, где $T_1$ — период низшей моды $n=1$.

Рассматриваются классы функций $\{\gamma(t)\}$, $\{\omega(t)\}$ такие, что

$$\int_0^T\gamma(t)dt=0,\quad \int_0^T(T-t)\gamma(t)=\int_0^T w(t)dt=c^*-c^0=\delta c. \tag{6}$$

Потенциал относительных скоростей $\varphi(t,x,y)$ (3) должен быть достаточно гладкой функцией всех аргументов, обеспечивающим малость кинематических и силовых возмущений, вызванных волновыми движениями жидкости согласно (1), (2), (5). В качестве масштаба скорости выбирается абсолютное максимальное, по $(t,x,y)$ значение величины $v=-\varphi_x \approx -\varphi_{1x}$ при заданных функциях $\gamma(t)$, $\omega(t)$ из рассматриваемого класса, либо величина $\hat{c}$, обусловленная допустимым значением $\hat{w}$, или мощностью, т.е. $\hat{c}\hat{w}$. Требуется на асимптотически большом интервале времени $T \gg T_1$ привести сосуд в состояние движения, как целого с требуемой вариацией скорости $\delta c \gg |v|$.

# 3. Примеры

Рассмотрим примеры реализации различных режимов управляемого движения, удовлетворяющих этим условиям [5].

## 3.1. Воздействие на сосуд посредством ударов

Пусть имеем место негладкое кинематическое воздействие аппроксимируемое посредством обобщенных $\delta$-функций Дирака в моменты времени $t=0, T, T \gg T_1$, положительной и отрицательной интенсивности $\pm w_0$. Соответствующее ускорение сосуда $w(t)$ (5), (6) может быть реализовано посредством силового воздействия [1, 3]. При упрощающем условии $w(t)=w_0=\text{const}$ для $0 \leqslant t \leqslant T$ получается кусочно-линейная зависимость $c(t)$

$$c=c^0\frac{T-t}{T}+c^*\frac{t}{T}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad c \equiv c^*, \quad t>T,$$

где $w_0=\delta c/T$. Подстановка найденных выражений $\gamma(t)$, $w(t)$ в формулы (5) приводит к искомым выражениям $\Theta_n(t)$ для коэффициентов Фурье искомого потенциала скоростей $\varphi(t,x,y)$ (3):

$$\Theta_n(t)=\frac{\alpha_n}{w_n}\frac{\delta c}{T}\left[s_n(t)-\sigma s_n(t-T)\right], \qquad \sigma=0,1 \quad (t \lesseqgtr T).$$

С помощью оценки $\hat{v}_1$ первой моды скорости жидкости $v_1=-\partial\varphi_1/\partial x$ получим отношение $\hat{v}_1/\delta c \sim T_1/T=\varepsilon \ll 1$ при достаточно большом значении $T$. Таким образом, посредством асимптотически малого управляющего воздействия $w_0=O(\sqrt{\varepsilon})$ на интервале времени $T \sim 1/\varepsilon$ можно добиться существенного изменения скорости сосуда $\delta c \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, причем относительная скорость жидкости $v$ будет $O(\sqrt{\varepsilon})$, т.е. асимптотически малой.

Отметим, что коэффициенты $\Theta_n \sim n^{-5/2}$, что приводит к абсолютной и равномерной сходимости ряда (3) и к непрерывно дифференцируемой по $x$, $y$ или по $t$ (дважды) функции $\varphi(t,x,y)$, т.е. ряды для скорости $v_{x,y}=\dot{\varphi}'_{x,y}$ и давления $p=\rho\dot{\varphi}$ будут сходящимися. Ряды для ускорений $\dot{\varphi}'_{x,y}$ будут сходящиеся по среднеквадратической норме. Возвышение $\eta$ будет также порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

## 3.2. Воздействие соответствующее кусочно-гладкой функции

Рассмотрим задачу управления в случае более гладкого по В.А. Стеклову [4] воздействия посредством кусочно-гладкой функции $\gamma(t)$; ускорение $w(t)$ будет кусочно-непрерывно дифференцируемой. Для определенности и наглядности полагаем два эквивалентных в смысле гладкости варианта

$$(7)\quad \begin{gathered} a)\quad \gamma=\gamma^a(t)=\gamma_0^a(1-2t/T), \qquad b)\quad \gamma=\gamma_0^b=\operatorname{sign}(1-2t/T),\\ 0\leqslant t\leqslant T;\quad \gamma^{a,b}(t)\equiv 0,\quad t<0,\quad t>T;\quad \gamma_0^{a,b}=\text{const}. \end{gathered}$$

Квадратуры от функций $\gamma^{a,b}(t)$ элементарно вычисляются и получаемые выражения для ускорения $w = w^{a,b}(t)$ автоматически удовлетворяют условиям $w^{a,b} \equiv 0$ при $t < 0$, $t > T$. Искомые значения скорости $c(t)$ также элементарно вычисляются аналитически

$$(8)\quad \begin{gathered} c^{a,b}(t)=c^0+\int_0^t w^{a,b}(\tau)d\tau=c^0+\int_0^t (t-\tau)\gamma^{a,b}(\tau)d\tau,\quad c^{a,b}(T)=c^*;\\ \gamma_0^a=6\delta cT^{-2},\quad \gamma_0^b=4\delta cT^{-2};\quad \delta c=c^*-c^0. \end{gathered}$$

С помощью выражений (7), (8) по формулам (5) вычисляются аналитически коэффициенты Фурье $\Theta_n(t)$ и их оценки при $t > T$:

$$(9)\quad \begin{gathered} \Theta_n^{a,b}(t)=\alpha_n\int_0^t c_n(t-\tau)w^{a,b}(\tau)d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T;\\ w^{a,b}(t)\equiv 0,\quad t<0,\quad t>T;\quad n=2k-1,\\ |\Theta_n^{a,b}(t)|\leqslant K_n^{a,b}\delta cT^{-2}\alpha_n\omega_n^{-2};\quad K_n^a\approx 24,\quad K_n^b\approx 16\\ |\varphi_n^{a,b}(t,x,y)|\leqslant \frac{4}{\pi^3}K^{a,b}\frac{l^2}{gT^2}\frac{\delta c}{n^3\operatorname{th}(\pi nh/l)}. \end{gathered}$$

Ряды (3) для $\varphi^{a,b}$ абсолютно и равномерно сходятся к гладким дифференцируемым функциям. Согласно (9) непрерывным будут распределенные скорости $v_{x,y}^{a,b} = -\partial\varphi^{a,b}/\partial x, \partial y$ и давление $p^{a,b} = \rho\dot{\varphi}^{a,b}$, а также ускорения $w_{x,y}^{a,b} = \dot{v}_{x,y}^{a,b}$. Из оценок (9) следует, что относительные величины указанных переменных могут быть сделаны сколь угодно малыми, в частности, относительные скорости

$$|v^{a,b}|/\delta c \sim K^{a,b}\frac{a}{gT^2}=\varepsilon^2,\quad |v_{a,b}|\sim\varepsilon^{2-\varkappa},\quad \delta c\sim 1/\varepsilon^{\varkappa},\quad 0<\varkappa<2$$

будут сколь угодно малыми, а скорость сосуда — сколь угодно большой при асимптотически большой величине $T \gg (g/l)^{-1/2}$ и достаточно гладкой функции $w(t)$.

Для гипотетической модели эволюции скорости танкера при $\delta c = 10$ мс$^{-1}$ ($\sim 20$ узлов), $v = 10^{-3}$ мс$^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $T = 10^3$ с, $l = 10^2$ м.

## 4. Заключение

Предложен и обоснован режим прецизионного управления сосуда с идеальной тяжелой жидкостью в состояние требуемого движения. Алгоритм реализован и тестирован для типовых управляющих функций. Установлена прикладная эффективность предложенного подхода для плохо управляемых колебательных систем с бесконечным числом степеней свободы в условиях резонанса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538, 17-08-00742 и 18-01-00812), а также в рамках государственного задания AAAA-A17-117021310387-0.

# Список литературы

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Акуленко Л.Д. О кинематическом управлении движением сосуда с идеальной тяжелой жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 39-46.
3. Акуленко Л.Д. Управление движением сосуда с тяжелой неоднородной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 11-21.
4. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
5. Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А. Приведение сосуда с тяжёлой жидкостью в требуемое состояние движения // Доклады Академии наук. 2017. № 4. С. 416-420.