УДК 621.396

ПРИМЕНЕНИЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

И.М. Рудько
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: igor-rudko@mail.ru

Ключевые слова: порядковая статистика, системы обнаружения, вероятности обнаружения и ложной тревоги, математическое моделирование.

Аннотация: Для систем обнаружения, реализующих алгоритм проверки двух статистических гипотез и использующих энергетический критерий обнаружения, разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на статистических свойствах усеченных порядковых статистик (УПС). Приведены сравнительные результаты моделирования системы обнаружения, реализующей «классический» (однопороговый) алгоритм, и системы обнаружения, реализующей алгоритм на основе УПС (двухпороговый).

1. Введение

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы и единственным их отличием являются энергии (дисперсии). В простейшей форме операция обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез. Приемник вычисляет отношение правдоподобия, которое представляет собой отношение плотностей распределения вероятностей для гипотез H_1(сигнал+шум) и H_0(шум). Модель обнаружения обычно представляется как энергетический порог, установленный над средним значением помехи.

2. Фильтр на основе усеченной порядковой статистики (УПС-фильтр)

Часто в качестве статистики от наблюдений выбирают энергию сигнала, наблюдаемого на интервале $[0, T_0]$, – энергетический критерий обнаружения (ЭКО) [1]: $X = \sum_{i=1}^{n} S^2(i\Delta t)$, где $T_0 = n\Delta t$; $\Delta t = 1/2\Delta F$; Δt – интервал дискретизации по времени; ΔF – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения.

В работах [2,3] рассматриваются УПС-фильтры, реализуемые во временной [2] или частотной [3] областях.

Алгоритм работы УПС-фильтра следующий:

- На вход УПС-фильтра поступает последовательность выборок $\boldsymbol{X_j} = \sum_{i=1}^{m} X_i$.
- Накапливается r оцениваемых выборок $\boldsymbol{X_j}$.
- По накопленным выборкам строится матрица X_{ij} размерностью m строк на r столбцов (r– «глубина» матрицы памяти) – $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}_j$, где $1 \le j \le r$.
- В каждом столбце матрицы X_{ij} строится порядковая статистика $X_{(i)j}$, где $1 \le i \le m$, – упорядоченные величины статистики X_i, такие, что $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(i)} \le \ldots \le X_{(m)}$.
- В каждой строке полученной матрицы $X_{(i)j}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор $\hat{m}$) $\hat{m}_i = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} X_{(i)j}$, где $1 \le i \le m$.
- Порог отсечения k (первый порог) определяется из условия: $k = \arg\min_i |h_0 - \hat{m}_i|$, где $1 \le i \le m$, а h_0 определяется, как будет показано ниже, по формуле (3).
- Вычисляется оценка $W_j = \sum_{i=k}^{m} X_{(i)j}$

На выходе УПС-фильтра получаем последовательность отфильтрованных оценок W_j, задача обнаружения по которым так же решается как задача проверки двух гипотез.

УПС-фильтр работает по принципу скользящего окна, т. е. каждый новый вектор $\boldsymbol{X_j}$ с индексом r+1 вытесняет из матрицы $X_{(i)j}$ вектор $\boldsymbol{X_j}$ с индексом 1.

Для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}_j$, где $1 \le j \le r$ (в отличие от «классического» алгоритма), что приводит к задержке в принятии решения на время $T = jT_0$, где $1 \le j \le r$. Такая задержка во многих задачах не является существенной.

Следует подчеркнуть, что если в «классическом» алгоритме для принятия решения используется только вектор $\boldsymbol{X}$, *то в предлагаемом алгоритме – матрица* $X_{(i)j}$, *в которой текущий вектор* $\boldsymbol{X_j}$ *является одним из столбцов.*

Работа УПС-фильтра основана на свойствах порядковых статистик [4]. Рассмотрим выборку, состоящую из m случайных величин X_i: $\{X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_m\}$. Пусть X_i описывается плотностью распределения $f_n(x) = 1/\sigma^2\, k_n\left(x/\sigma^2\right)$ и функцией распределения $F_n(x) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^x x^{n/2-1} e^{-x/2\sigma^2} dx = K_n(x/\sigma^2)$, где $x > 0$, $k_n(\bullet)$ – плотность и $K_n(\bullet)$ – функция центрального χ^2-распределения с n степенями свободы; σ^2 – дисперсия.

Вычислим моменты случайной величины $W = \sum_{i=k}^{m} X_{(i)}$, где $X_{(i)}$, $1 \le i \le m$, – упорядоченные величины, такие, что $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(i)} \le \ldots \le X_{(m)}$. Если случайные величины X_i статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними. Будем называть W усеченной порядковой статистикой (УПС), а k – порогом отсечения. В работе [4] приведены выражения для вычисления моментов порядковых статистик, которые для выборки, описываемой центральным χ^2-распределением имеют следующий вид:

– математическое ожидание μ_j величины $X_{(j)}$ определяется по формуле:

$$\mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1}\left[1-K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j}\frac{1}{\sigma^2}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\, x dx\,,$$

– дисперсия:

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1}\left[1-K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j}\frac{1}{\sigma^2}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\left(x-\mu_j\right)^2 dx\,,$$

– ковариация: $\sigma_{jk} = E\left[X_{(j)}X_{(k)}\right] =$

$$\frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!}\int_0^\infty\left[\int_0^y C(x,y)\frac{1}{\sigma^4}k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)k_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right)x\,y\,dx\right]dy,$$

где $C(x,y) = K_n\left(x/\sigma^2\right)^{j-1}\left[K_n\left(y/\sigma^2\right) - K_n\left(x/\sigma^2\right)\right]^{k-j-1}\left[1 - K_n\left(y/\sigma^2\right)\right]^{m-k}$.

Математическое ожидание случайной величины W определяется по формуле

$$\mu_W(k) = \sum_{j=k}^{m}\mu_j,\ 1 \le k \le m, \tag{1}$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин $X_{(i)}$ [1]:

$$\sigma_W^2(k) = \sum_{l=k}^{m}\sigma_l^2 + 2\sum_{k\le j<l\le m}\sigma_{jl},\ l \le k \le m, \tag{2}$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях m ее функция плотности распределения также нормализуется: $W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$.

3. УПС в задаче обнаружения подвижного объекта

Математическое ожидание $\mu_W(k)$ и дисперсия $\sigma^2{}_W(k)$ определяются формулами (1) и (2) и так же как для случайной величины X зависят только от дисперсии σ^2. Таким образом, распределения случайной величины W для шума (H_0) и смеси сигнала с шумом (H_1) различаются только дисперсией (мощностью) σ^2 наблюдаемого сигнала $S(t)$, которая для слагаемых статистики X и УПС W одинакова.

В работе [2] показано, что существует оптимальное значение порога отсечения k – $k_{\text{опт}}$, обеспечивающее максимальную разделимость статистик W для гипотез H_0 и H_1, (в районе медианы $f_n(x)$). Известными параметрами являются μ_0 и σ_0^2. Поэтому порог h_0 определяется из уравнения:

$$\alpha = \int_0^{h_0} f_{nш}(x)dx = \frac{1}{2^{n/2}\sigma_0^n\Gamma(n/2)}\int_0^{h_0} x^{n/2-1}e^{-x/2\sigma_0^2}dx, \tag{3}$$

где α – заданный квантиль.

Процесс принятия решения при использовании УПС W является двухшаговым:

- по случайной выборке X_i, $1 \le i \le m$, строится порядковая статистика $X_{(i)}$, по которой для заданного порога отсечения k (1-й порог) формируется УПС W (УПС-фильтр);
- процесс принятия решения тот же, что и в «классическом» алгоритме: а именно, для УПС W по заданной $P_{\text{лт}}$ выставляется порог обнаружения (2-й порог), в случае превышения которого принимается решение о справедливости гипотезы H_1.

Сравним рассмотренные выше алгоритмы («классический» и на основе УПС) на примере обработки локационной информации в пассивном режиме. Рассмотрим задачу обнаружения подвижного объекта (ПО) неподвижным наблюдателем (НН).

Обнаружение осуществляется по результатам обработки излученного объектом и принятого наблюдателем сигнала при наличии помех. Решение о наличии или отсутствии сигнала от объекта принимается НН периодически, после обработки поступившей на интервале наблюдения (накопления) длительностью T_0 реализации $X_1, X_2, ..., X_m$. $\sigma_ш^2$ – дисперсия помех на входе НН, $\sigma_c^2 = \sigma_c^2(v, D)$ - дисперсия сигнала, излученного ПО и поступившего на вход НН, зависящая от текущей скорости движения ПО v и текущего расстояния D между ним и НН. X_i имеют дисперсию $\sigma_ш^2$ для шума и $\sigma_c^2 + \sigma_ш^2$.для сигнала и шума. Задача обработки локационной информации в пассивном режиме полностью описывается моделью, использующей ЭКО, а система обнаружения описывается рассмотренной выше моделью «классической» задачи проверки двух гипотез.

Вероятность обнаружения ПО наблюдателем по результатам обработки информации на одном интервале наблюдения T_0 вычисляется по следующей формуле:

$$P_{\text{обн}}(\nu,D)=1-F_N\left(h_F\Big/\left(\frac{\sigma_c^2(\nu,D)}{\sigma_ш^2}+1\right)\right)=1-F_N\left(\frac{h_F}{\rho(\nu,D)+1}\right), \quad (4)$$

где h_F – квантиль уровня $(1-\alpha)$ для χ^2-распределения с N степенями свободы, $N=2T_0\Delta F$, $\alpha=P_{\text{лт}}$ – вероятность ложной тревоги, ρ – отношения сигнал/помеха.

Для заданной $P_{\text{лт}}$ вероятность обнаружения $P_{\text{обн}}$ в зависимости от дистанции D для «классической» задачи определяется по формуле (4) – обозначим ее как $P^X_{\text{обн}}(\nu,D)$.

Сформируем УПС W. Для этого входной сигнал длительностью T_0 разбивается на m фрагментов, причем разбиение может происходить как во временной, так и в частотной области. В результате каждый из m фрагментов имеет плотность вероятности, описываемую χ^2 - распределением с $n=N/m$ степенями свободы. Формулы (1) и (2), позволяют рассчитать μ_0 и σ_0^2 помехи для УПС W по известным параметрам помехи и заданному порогу отсечения k. «Потенциальные» вероятности обнаружения $P^W_{\text{обн}}(\nu,D)$ на каждом интервале $[0,\ T_0]$, зависят от ρ. Как следует из формулы (4), ρ является переменным и неизвестным параметром. Поэтому под «потенциальной» $P_{\text{обн}}$ здесь понимается вероятностью обнаружения, которая могла бы быть достигнута, если бы условие $\rho = const$ выполнялось для достаточно большого числа реализаций. Затем строится матрица $X_{(i)j}$, «глубиной» r, по которой для известных параметров помехи определяется порог отсечения k. И, наконец, по порогу отсечения k строится УПС W. Для заданной $P_{\text{лт}}$ и отношению сигнал/помеха ρ рассчитываются вероятности обнаружения в зависимости от дистанции D – $P^W_{\text{обн}}(\nu,D)$.

Для задачи проверки двух гипотез с использованием УПС из-за сложности модели (алгоритма обнаружения) все параметры модели могут быть рассчитаны только путем математического моделирования.

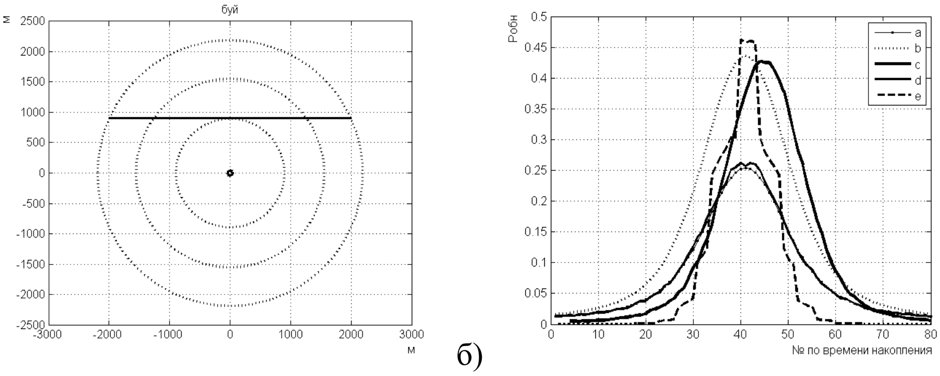
4. Результаты моделирования

Математическая модель содержит генераторы случайных чисел, генерирующие χ^2 -распределения с n степенями свободы и дисперсиями $\sigma_ш^2$ и $\sigma_c^2+\sigma_ш^2$ для гипотез H_0 и H_1 соответственно. Согласно приведенным выше формулам строятся случайные величины Z и W. Для гипотез H_0 и H_1 набираются статистики для случайных величин Z и W, по которым строятся оценки $\hat{\mu}_{Z0},\hat{\sigma}^2_{Z0}$ и $\hat{\mu}_{W0},\hat{\sigma}^2_{W0}$ для гипотезы H_0 и $\hat{\mu}_{Z1},\hat{\sigma}^2_{Z1}$ и $\hat{\mu}_{W1},\hat{\sigma}^2_{W1}$ для гипотезы H_1. По этим оценкам для заданной $P_{\text{лт}}$ определяется $P_{\text{обн}}$.

Моделирование проводилось при следующих предположениях:

- ПО пересекает район, контролируемый НН, находящемся в точке с координатами (0, 0), двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью из точки с координатами (–2000, 900) в точку с координатами (2000, 900), как показано на рис. 1 а);
- число независимых интервалов за время прохождения трассы $K = 80$;
- закон затухания сигнала в среде – сферический;
- суммарное число степеней свободы $N = nm = 2000$.

На рис. 1 б) приведены зависимости вероятности обнаружения $P_{обн}$ от дистанции D (т.е. от отношения сигнал/помеха ρ) для «однопорогового» и «двухпорогового» алгоритмов для «глубины» памяти r=4. Параметры модели имеют следующие значения: $n = 20$, $m = 100$, $P_{лт} = 0{,}005$, первый порог равен медиане статистики X_i для помехи (в формуле (3) $\alpha = 0{,}5$). Размеры массивов для набора статистик – 8192.



а) б)

Рис. 1 а)**.** Трасса прохода ПО мимо НН; б). Зависимости вероятностей обнаружения $P_{обн}$ от дистанции D.

На рис. 1б приняты следующие обозначения: a) – теоретическая $P_{обн}$ для «однопорогового» алгоритма; b) – теоретическая $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма; c) – оценки $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма (по модели); d) – оценки $P_{обн}$ для «однопорогового» алгоритма(по модели); e) – оценки «потенциальной» $P_{обн}$ для «двухпорогового» алгоритма (по модели).

Сдвиг максимума графика «c» относительно «d» определяется «глубиной» памяти.

5. Заключение

Разработан алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах УПС, который позволяет обеспечить большую $P_{обн}$ при заданной $P_{лт}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала, и использования информации, содержащейся в предыдущих реализациях сигнала, для построения оценки этого порога, которая в «классическом» алгоритме не используется.

Приводятся результаты математического моделирования. Показано, что применение алгоритма на основе УПС (двухпорогового) в задаче обнаружения ПО позволяет обеспечить существенно большую $P_{обн}$ при заданной $P_{лт}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез или при фиксированных вероятностях $P_{обн}$ и $P_{лт}$ обеспечить перекрытие заданного района меньшим количеством НН.

Список литературы

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. М.: Советское радио, 1968. 504 с.
2. Рудько И.М. Применение порядковых статистик в задачах обнаружения // Управление большими системами. Выпуск 37. М.: ИПУ РАН, 2012. С. 63-83.
3. Рудько И.М Применение порядковых статистик в задачах обнаружения в частотной области // Управление большими системами. Выпуск 62. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 6-29.
4. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.