УДК 517.977

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ В АРЕАЛЕ С УЧЕТОМ ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ И МИГРАЦИИ

И.В. Данилова

Институт прикланых математических исследований Карельского научного центра РАН

Россия, 185000, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11

E-mail: DanilovaInna1987@mail.ru

Ключевые слова: динамика популяции, миграция, внутривидовая конкуренция, равновесие по Нэшу.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального поведения одно — и двухвидовой популяции в ареале с учетом миграции из него и внутривидовой конкуренции. Для двух взаимодействующих популяций типа «хищник — жертва» рассматривается задача нахождения равновесия по Нэшу, обеспечивающего оптимальную скорость роста популяции.

1. Введение

Рассматриваются задачи оптимального поведения популяции, находящейся в некотором ареале с учетом миграции из него и внутривидовой конкуренции. Для единственной в ареале популяции рассматривается следующая задача: какая часть популяции должна остаться в ареале, не мигрируя из него, чтобы численность популяции в ареале была максимальна в некоторый момент времени T.

Для двух взаимодействующих популяций типа «хищник — жертва» рассматривается задача нахождения равновесия по Нэшу, обеспечивающего оптимальную скорость роста популяции.

2. Задача оптимального поведения одновидовой популяции

Рассматривается дифференциальное уравнение,описывающее динамику численности популяции в ареале

(1) $$\dot{x} = apx - b(px)^2 - \mu(1-p)x$$

и его решение

(2) $$x(T,p,x_0) = \frac{((a+\mu)p-\mu)x_0}{((a+\mu)p-\mu-x_0bp^2)e^{(\mu-(a+\mu)p)T}+x_0bp^2},$$

где p — доля популяции численностью $x(T, p, x_0)$ в момент времени T, которая останется в ареале, $p \in [0, 1]$, a — скорость роста популяции, μ — скорость миграции популяции, b — коэффициент внутривидовой конкуренции, x_0 — численность популяции в начальный момент времени $t = 0$. Исследуется наличие и расположения максимума функции $x(T, p, x_0)$ при следующих условиях относительно начальной численности популяции x_0:

1)$x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$

2)$x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$, где $z = a + \mu$, $y = bx_0$, $a > \mu$.

Следует отметить, что решение этой задачи осложняется большим количеством параметров, входящих в функцию (2).

Сформулированы и доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$, то при любом $T > 0$ решение (2) имеет единственную точку максимума при $p > \frac{2\mu}{z}$*

На рис.1 проиллюстрирован график функции (2) при условии утверждения 1.

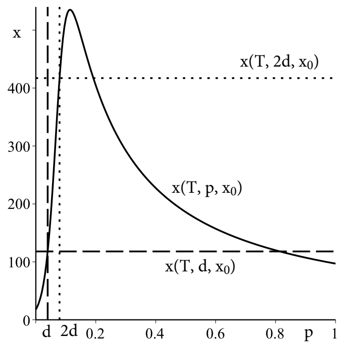

Рис. 1. Решение (2) при условии $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$, где $d = \frac{\mu}{z}$, $a = 0.97$, $b = 0.01$, $\mu = 0.04$, $x_0 = 130$, $T = 50$

Утверждение 2. *Если $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$, то при любом $T > 0$ решение (2) имеет единственную точку максимума при $p \in (\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z})$.*

На рис. 2 проиллюстрирован график функции (2) при условии утверждения 2.

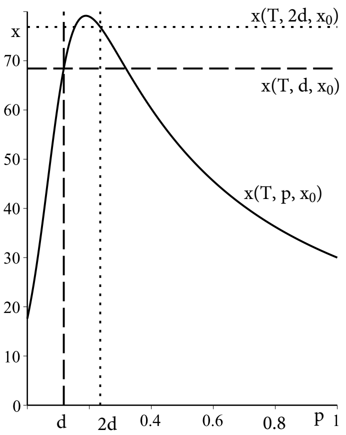

Рис. 2. Максимум решения (2) при условии $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$, где $d = \frac{\mu}{z}$, $a = 0.3$, $b = 0.01$, $\mu = 0.04$, $x_0 = 130$, $T = 50$

Рассматривается также задача асимптотической оптимизации решения (2), которая состоит в нахождении максимума положения равновесия $x^*(p) = \frac{p(a+\mu)-\mu}{bp^2}$ уравнения (1). Показано, что существует предельный максимум функции $x^*(p)$, т.е. $p_{max} = \frac{2\mu}{a+\mu}$ решения (2).

Утверждение 3. *При $T \to \infty$ и $p > \frac{\mu}{a+\mu}$ существует предельный максимум $p_{max} = \frac{2\mu}{a+\mu}$ решения (2).*

3. Задача оптимального поведения двухвидовой популяции в системе «хищник — жертва»

Рассматривается система, описывающая динамику численности популяции хищника и жертвы в некотором ареале, с учетом внутривидовой конкуренции популяции жертвы и с учетом миграции из ареала популяций хищника и жертвы.

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot px - b(px)^2 - \mu_1(1-p)x - cpx \cdot qy \\ \dot{y} = kcpx \cdot qy - m \cdot qy - \mu_2(1-q)y \end{cases} \tag{3}$$

Где x — численность популяции жертвы, y — численность популяции хищника, p — доля от численности популяции жертв в момент времени, которая останется в ареале, q — доля от численности популяции хищника момент времени, которая останется в ареале, c — интенсивность потребления жертвы хищником, b — коэфициент внутривидовой конкуренции популяции жертв, μ_1 — интенсивность миграции популяции жертвы из ареала, μ_2 — интенсивность миграции популяции хищщника, a — скорость роста популяции жертвы, k — скорость роста популяции хищника. При этом численности популяций жертв и хищников, присутствующих в ареале в момент времени t, равны $px(t)$ и $qx(t)$ соответственно.

На основе подхода в работах [2] и [4], для максимизации скоростей роста популяций жертвы и хищника вводятся функции выигрыша $H_1 = (ap - bp^2x - \mu_1(1-p)) - cpqy$ и $H_2 = q(kcpx - m) - \mu_2(1-q)$, которые нужно максимизировать по параметрам p и q соответственно. Находятся решения $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dp} = a - 2bpx + \mu_1 - cqy = 0 \\ \frac{dH_2}{dq} = kcpx - m + \mu_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$\tilde{p} = \frac{m-\mu 2}{kcx}$ и $\tilde{q} = \frac{(a+\mu 1)kc - 2b(m-\mu_2)}{kc^2y}$. Если $\tilde{p} = 1$ и $\tilde{q} = 1$, то $\tilde{x} = \frac{m-\mu 2}{kc}$ и $\tilde{y} = \frac{(a+\mu 1)kc - 2b(m-\mu_2)}{kc^2}$, где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — численности популяций жертвы и хищника, с которых начинается миграция популяций. Исследуется равновесие по Нэшу.

Утверждение 4. *Пусть $m > \mu_2$ и $c > \frac{2b(m-\mu_2)}{(a+\mu_1)k}$, тогда*

- *Если $x > \tilde{x}$ и $y \geqslant \tilde{y}$ то $(p^*, q^*) = (\tilde{p}, \tilde{q})$;*
- *Если $x < \tilde{x}$, то $(p^*, q^*) = (1, 0)$;*
- *Если $x > \tilde{x}$ и $y < \tilde{y}$, то $(p^*, q^*) = (1, 1)$;*
- *Если $x = \tilde{x}$, то $(p^*, q^*) = (1, q)$, $q \in [0, 1]$.*

В случаях $m \leqslant \mu_2$ и $c > \frac{2b(m-\mu_2)}{(a+\mu_1)k}$, $m > \mu_2$ и $c \leqslant \frac{2b(m-\mu_2)}{(a+\mu_1)k}$ получены аналогичные результаты.

4. Заключение

Проанализировано решение (2) уравнения (1) и определен максимум этого решения при условиях $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ и $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$. Определен предельный максимум для решения (2) при $T \to \infty$. Определены равновесия по Нэшу p^* и q^* при некоторых условиях для численности популяции хищника и жертвы, соответствующие оптимальному, в смысле максимизации скоростей роста, поведению популяций.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00249а.

Список литературы

1. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К., Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989. Т. 1. 667 с.
2. Иванова А.С., Кириллов А.Н. Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управления в медико-биологических и экологических системах 2015. № 55. С. 239-258.
3. Мазалов В.В., Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2016. 448 с.
4. Krivan V., Cressman R. On evolutionary stability in predator–prey models with fast behavioural dynamics // Evolutionary Ecology Research. 2009. Vol. 11. P. 227-251.