

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ СЕТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРАВИЛ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

С.В. Швыдун

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20
E-mail: shvydun@hse.ru*

Ключевые слова: влияние в сетях, многослойные сети, правила коллективного выбора

Аннотация: В работе рассматривается задача оценки влияния в сетевых структурах, связи между вершинами в которых могут быть различного типа. Предлагается модель, которая производит оценку попарного влияния вершин друг на друга на каждом уровне взаимодействия с учетом индивидуальных характеристик вершин, а также возможности их непрямого и группового взаимодействия. Процедура оценки итогового влияния вершин осуществляется с использованием известных правил коллективного выбора. Показано применение предложенной модели к сети международной торговли.

1. Введение

Большинство существующих систем (социальные, технологические, биологические и т.д.) имеет сложную сетевую структуру, одни и те же вершины в которой могут иметь различные виды взаимосвязей друг с другом. Такой тип структур называется мультиплексным, который можно определить через набор из L графов $\{G_l = (V, E_l)\}_{l=1}^L$, где $E_l \subseteq V \times V$ – набор ребер, или как тройку $G_M = (V, E, L)$, где V – набор вершин, L – набор слоев, описывающих разные типы взаимоотношений, $E \subseteq V \times V \times L$ – набор взвешенных ребер [1-4]. Дополнительно, каждый слой сетевой структуры может быть описан с помощью взвешенной матрицы связности $W^l = [w_{ij}^l]$, а каждая вершина может характеризоваться набором параметров $Q_i = (q_i^1, q_i^2, \dots, q_i^L)$, которые могут показывать порог влияния на данную вершину на каждом слое.

Одним из важных аспектов сетевого анализа является вопрос определения ее наиболее влиятельных и уязвимых элементов. Так как большинство существующих сетей имеют более сложную структуру, вопрос определения наиболее важных и уязвимых элементов гораздо сложнее, чем для сетей, имеющих один тип связи между вершинами. На данный момент существует ряд моделей, возникших на основе классических индексов центральности, которые позволяют оценить влияния в многослойных сетевых структурах. Одним из таких подходов является оценка центральности вершин на каждом индивидуальном слое, которая затем агрегируется с учетом веса вершин или других процедур агрегирования. Тем не менее, данный подход не учитывает информации о том, как две вершины связаны между собой на различных слоях. Второй подход заклю-

чается в преобразовании многослойной сетевой структуры в однослойную, в которой вес на ребрах между вершинами вычисляется как линейная свертка информации на ребрах каждого слоя [1, 5]. К сожалению, данный метод не учитывает информацию о структуре сети на каждом отдельном слое. Более того, взаимосвязи между вершинами могут быть даны в разных измерениях, что снижает интерпретируемость агрегированного веса ребра. Существует и более сложные подходы, которые заключаются в построении матрицы обобщенной инцидентности, где различные слои сетевой структуры связываются между собой, а влияние определяется на основе вычисления собственного вектора построенной матрицы [6-10]. Основная идея данного подхода заключается в том, что центральность вершины зависит не только от взаимосвязей на каком-то одном слое, но и от взаимосвязей на всех других слоях. В работе [11] было показано, как некоторые существующие индексы центральности могут быть адаптированы к сетям данного типа. Тем не менее, во многих приложениях не вполне понятно, как связать между собой различные слои между собой, так как влияние на одном слое сети не всегда приводит к влиянию на других слоях сетевой структуры. В связи с этим, вопрос построения матрицы обобщенной инцидентности является спорным и требует более детального изучения того, как различные слои связаны друг с другом.

2. Модель оценки влияния в многослойных сетевых структурах

В нашей работе предлагается модель оценки влияния в мультиплексных сетях с использованием правил коллективного выбора. Построенная модель по большей части разработана для ситуаций, когда влияние на различных слоях между вершинами происходит независимо друг от друга или когда нет четкой информации о взаимосвязи между слоями. В таком случае задача оценки влияния в многослойных сетях может быть сведена к стандартной задаче коллективного выбора. Основная идея нашего подхода заключается в перестроении исходной сети в сеть влияния, определении попарного влияния вершин друг на друга и агрегирования данной информации с использованием концепций теории коллективного выбора.

Преобразование исходной сети и оценка попарного влияния основано на ранее разработанных моделях влияния (индексы дальних взаимодействия LRIC), предложенных в работах [12-14], которые позволяют учитывать индивидуальные атрибуты вершин, возможности их группового влияния, а также не прямые взаимодействия между собой.

Процедура оценки попарного влияния делится на два этапа. На первом этапе исследуется влияние на каждую индивидуальную вершину отдельно, в рамках чего прямое влияние одной вершины на другую заключается в поиске минимальной группы, совокупная интенсивность которой превосходит ранее определенный порог влияния. Значение прямого влияния между вершинами измеряется от 0 (отсутствие влияния) до 1 (максимальное влияние). Тем не менее, так как вершины могут влиять друг на друга не только напрямую, но через какие-то промежуточные узлы, второй этап модели заключается в рассмотрении различных каналов влияния вершин друг на друга. В работах [12-14] было предложено несколько моделей оценки непрямого влияния, например, путем рассмотрения всех возможных путей между вершинами или нахождении пути, имеющего наибольшую силу влияния. Таким образом, предложенная модель преобразует исходную сеть в сеть попарного влияния вершин друг на друга на каждом отдельном слое. Обозначим через S_M полученный набор матриц, характеризующих попарное влияние вершин на конкретном слое.

Для агрегирования информации влияния вершин друг на друга на различных слоях мы будем использовать ординальный подход, который не чувствителен к проблеме несравнимости различных слоев. Так как мы рассматриваем все слои между вершинами независимо, т.е. не рассматривается ситуация, когда влияние на вершину на одном слое приводит к влиянию на другом слое, можно преобразовать исходную задачу оценки влияния в мультиплексных сетях к задаче коллективного и многокритериального принятия решений. Основная задача данной задачи является оценка того, какой набор альтернатив необходимо выбрать из исходного набора, характеризуемого некоторым набором критериев. Так как попарное влияние дано в количественной шкале, мы можем рассмотреть данные значения как некоторые значения функции полезности и связать задачу влияния в сетевых структурах с задачей коллективного выбора на основе этих функций полезности. Для решения данной проблемы мы адаптируем ординальный подход, основанный на мажоритарном отношении и построении турнирных матриц, который является более устойчивым к проблемам противоречия критериев друг с другом, а также их пороговой некомпенсируемости.

Определение 1. Определим общее число слоев в котором вершина i имеет большее влияние на вершину j по следующей формуле

$$(1) \quad n(i, j, C_M) = \text{card}\{l \in N \mid c_{ij}^l - c_{ji}^l > 0\},$$

Отметим, что данная формула может принимать более универсальный вид путем задания некоторого параметра $\varepsilon > 0$

$$(2) \quad n(i, j, C_M) = \text{card}\{l \in N \mid c_{ij}^l - c_{ji}^l > \varepsilon\}.$$

Определение 2. Определим мажоритарное отношение μ по следующей формуле

$$(3) \quad i\mu j \Leftrightarrow n(i, j, C_M) > n(j, i, C_M).$$

Другими словами, будем считать, что вершина i доминирует вершину j , если общее число слоев, где вершина i оказывает большее влияние на вершину j больше общего числа слоев, где наблюдается обратная ситуация.

Существует большое число способов того, как произвести ранжирование вершин на основе формул (1)-(3). В Таблице 1 представлен список некоторых процедур коллективного выбора.

Таблица 1. Список процедур коллективного выбора.

#	Название процедуры выбора	Тип процедуры
1	Правило Борда	Позиционные правила
2	Правило Блэка	
3	Обратное правило Борда	
4	Правило Нансона	
5	Победитель Кондорсе	Правила, использующие мажоритарное отношение
6	Минимальное доминирующее множество	
7	Минимальное непокрытое множество	
8	Минимальное слабоустойчивое множество	
9	Правило Фишберна	
10	Непокрытое множество I	
11	Непокрытое множество II	
12	Правило Ричалсона	
13	Ядро	
14	k-устойчивые множества	Правила, использующие вспомогательную числовую шкалу
15	Первое правило Копланда	
16	Второе правило Копланда	
17	Третье правило Копланда	Правила, использующие турнирную матрицу
18	Минимаксная процедура	
19	Процедура Симпсона	

Стоит отметить, что для оценки наиболее важной вершину могут использоваться и другие модели коллективного выбора. В работах [15, 16] приведено описание различных правил коллективного выбора, а также исследуются нормативные свойства данных процедур. Матрично-векторное представление различных процедур, использующих мажоритарное отношение μ приведено в [17].

3. Применение модели к сети торговли продовольствием

Рассмотрим применение предложенной модели оценки влияния в мультиплексной сети, характеризующую информацию о международной торговле по наиболее важным для продовольственной безопасности продуктам питания:

- Мясо птицы;
- Пшеница;
- Рис.

Вершинами сети являются страны, а взаимосвязи показывают общий объем торговли между странами по отдельному продукту. Вершины сети неоднородны, так как они имеют свой набор характеристик (например, ВВП, население, уровень потребления и производства и т.д.). Другими словами, один и тот же уровень торговли может быть критическим для одной страны и незначительным для другой страны. В связи с этим необходимо учитывать индивидуальные атрибуты стран для оценки общего влияния в сети международной торговли. Для оценки попарного влияния с учетом данных особенностей, мы применили индекс дальних взаимодействий LRIC по методологии, описанной в работах [18-19]. Как результат, была рассчитана информация о попарном влиянии вершин друг на друга на каждом рассматриваемом слое и агрегируем данную информацию в соответствии с предложенной моделью (см. Таблица 2).

Таблица 2. Ранжирование стран (ТОП-10).

#	Правило Борда	Первое правило Коппенда	Минимальное слабоустойчивое множество
1	США	США	США
2	Тайланд	Тайланд	Тайланд
3	Бразилия	Бразилия	Бразилия
4	Аргентина	Аргентина	Аргентина
5	Канада	Канада	Канада
6	Уругвай	Уругвай	Уругвай
7	Индия	Индия	Индия
8	Вьетнам	Пакистан	Пакистан
9	Италия	Вьетнам	Вьетнам
10	Франция	Австралия	Австралия

Как показано в Таблице 2, наиболее важным игроком на рынке торговли рассматриваемых 3 продуктов питания является США. Действительно, данная страна является основным экспортером по всем рассматриваемым продуктам питания. Индия, Пакистан, Тайланд и Вьетнам являются основными экспортерами риса, что объясняет их лидирующие позиции (Тайланд также входит в ТОП-15 по экспорту мяса птицы). Что касается других стран, Аргентина, Бразилия и Канада имеют большие значения экспорта мяса птицы и пшеницы. Наконец, можно обратить внимание, что данные ранжирования коррелируют друг с другом и показывают схожие результаты и позволяют выявить наиболее важных участников торговли с учетом рассматриваемых типов продуктов.

4. Заключение

В рамках работы был предложен подход к оценке влияния в мультиплексных сетях. Наша модель ориентирована для случаев, когда нет четкой информации о зависимости между различными слоями. Важной частью нашей работы является преобразование сети, которое осуществляется с учетом неоднородности исходной сети. Ряд процедур коллективного выбора был адаптирован к оценке влияния в сетевых структурах. Наконец, предложенная модель была применена к сети международной торговли, а полученные результаты позволили выявить наиболее важных ее участников.

5. Благодарности

Работа выполнена в Международной Лаборатории Анализа и Выбора Решений в рамках реализации «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и частично поддержана грантом РФФИ №18-01-00804а «Влияние стран в задаче анализа продовольственной безопасности».

Список литературы

1. Kivelä M., Arenas A., Barthelemy M., Gleeson J.P., Moreno Y., Porter M.A. Multilayer networks // *Journal of Complex Networks*. 2014. Vol. 2, No. 3. P. 203-271.
2. Wasserman S., Faust K. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
3. Bianconi G. Statistical mechanics of multiplex networks: entropy and overlap // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. 062806.
4. Horvát E.Á., Zweig K.A., One-mode Projection of Multiplex Bipartite Graphs // 2012 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining. Istanbul, 2012.
5. Rocklin M., Pinar A. On clustering on graphs with multiple edge types // *Internet Math*. 2013, Vol. 9, No. 1. P. 82- 112.
6. Cozzo E., de Arruda G.F., Rodrigues F.A., Moreno Y. Multilayer Networks: Metrics and Spectral Properties // In: Garas A. (eds) *Interconnected Networks. Understanding Complex Systems*. Springer, 2016.
7. Solé-Ribalta A., De Domenico M., Kouvaris N.E., Díaz-Guilera A., Gómez S., Arenas A. Spectral properties of the Laplacian of multiplex networks // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. 032807.
8. De Domenico M., Sole-Ribalta A., Cozzo E., Kivela M., Moreno Y., Porter M. A., Gómez S., Arenas A. Mathematical formulation of multi-layer networks // *Physical Review X*. 2013. Vol. 3. 041022.
9. Rahmede C., Iacovacci J., Arenas A., Bianconi G. Centralities of nodes and influences of layers in large multiplex networks // *Journal of Complex Networks*. 2017. cnx050.
10. Solá L., Romance M., Criado R., Flores J., García del Amo A., Boccaletti S. Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks // *Chaos*. 2013. Vol. 23. Article 033131.
11. De Domenico M., Sole-Ribalta A., Omodei E., Gómez, S., Arenas, A. Centrality in interconnected multi-layer networks // In: arXiv preprint arXiv:1311.2906. 2013.
12. Aleskerov F., Meshcheryakova N., Shvydun S. Power in Network Structures // In: Kalyagin V., Nikolaev A., Pardalos P., Prokopyev O. (eds) *Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. NET 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Vol 197. Springer, 2017.
13. Aleskerov F., Meshcheryakova N., Shvydun S., Centrality measures in networks based on nodes attributes, long-range interactions and group influence // arXiv preprint arXiv:1610.05892.
14. Meshcheryakova N., Shvydun S. Power in Network Structures Based on Simulations // In: Cherifi C., Cherifi H., Karsai M., Musolesi M. (eds) *Complex Networks & Their Applications VI. COMPLEX NETWORKS 2017. Studies in Computational Intelligence*. Vol 689. Springer, 2018.

15. Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. Elsevier, North-Holland, 1995, 314 p.
16. Shvydun S. Normative properties of multi-criteria choice procedures and their superpositions: I. Working paper WP7/2015/07 (Part 1). Moscow: HSE Publishing House, 2015.
17. Aleskerov F.T., Subochev A. Matrix-vector representation of various solution concepts // Working papers WP7/2009/03. Moscow: HSE Publishing House, (2009).
18. Aleskerov F., Sergeeva Z., Shvydun S. Assessment of Exporting Economies Influence on the Global Food Network // In: Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications. Vol 130. Springer, 2017.
19. Aleskerov F.T., Meshcheryakova N.G., Sergeeva Z., Shvydun S.V. Centrality Measures And Clustering Analysis in a Retail Food Network // In: 2017 IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies / Ed. by Novikov D.A. Vol. 1. M., 2017. P. 48-52.