УДК 06.35.51

СОГЛАСОВАННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И СТИМУЛИРОВАНИЕ В СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЕ

А.К. Еналеев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: anverena@mail.ru

Ключевые слова: центр, агенты, целевые функции, штрафы, план, согласование, равновесие, оптимальность.

Аннотация: Рассматривается модель системы с сетевой структурой, состоящей из центра и нескольких агентов. Вершины сети соответствуют агентам, выбирающим решения, а дуги определяют связи между агентами. Связи образуются вследствие наличия потерь в целевых функция агентов от несовпадения принятых ими решений. Центр управляет выбором решений агентов, вводя в их целевые функции штрафы за несовпадение принятых решений с устанавливаемыми им планами. В работе охарактеризовано множество равновесных решений, получены условия совпадения решений с планами, определены условия согласования процедуры планирования с функциями штрафов, описана согласованная система штрафов, получены условия оптимальности предлагаемых согласованных процедур планирования и стимулирования.

Представленные результаты являются продолжением исследований, проводимых в рамках теории активных систем [1-6]. Сетевые активные системы рассматривались в [1, 4, 6]. В [1] исследовалась задача построения процедур планирования и компенсаторных функций стимулирования в условиях полной информированности центра при наличии технологических связей между агентами, образующих сетевую структуру без контуров; в [6] определен оптимальный механизм управления для такой же сетевой структуры, но при неполной информированности центра; в [4] исследовалась задача построения механизма управления при назначении одного и того же плана для всех агентов в сетевой системе, связи между агентами в которой определяются зависимостью потерь агентов от несовпадения выбираемых ими состояний.

Рассматриваемая система состоит из центра и n агентов. Заданы целевая функция центра $F(\overline{x},\overline{y}) = F(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ и целевые функции агентов $f_i(x_i,\overline{y}) = f_i(x_i,y_1,...,y_n)$, определенные при всех $x_i \in Y, y_i \in Y$, где $i = 1,...,n$; Y – компактное множество. Назначаемые центром планы x_i и выбираемые агентами решения y_i принимают значения из заданных компактных множеств Y_i, где $Y_i \subset Y$.

Предположим, что целевая функция $f_i(x_i,\overline{y}) = h_i(y_i) - \chi_{0i}(x_i,y_i) - \sum_{j=1 \;\; j\neq i}^{n} \chi_{ji}(y_j,y_i)$ i-го агента содержат функцию дохода $h_i(y_i)$, функцию штрафов $\chi_{0i}(x_i,y_i)$ за отклонение выбираемого агентом решения y_i от плана x_i и функции потерь $\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \chi_{ji}(y_j, y_i)$ из-за отклонения решений $\overline{y}_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ других агентов от решения i-го агента. Пусть $h_i(y_i)$ полунепрерывна сверху, а функции штрафов и потерь полунепрерывны снизу и обладают следующими свойствами: $\chi_{ji}(y, y) = 0$, $\chi_{ji}(y_j, y_i) \geq 0$ для всех допустимых значений аргументов, $i = 1, ..., n,\ j = 0, ..., n.$

Наличие функций потерь $\chi_{ji}(y_j, y_i)$ в целевых функциях агентов определяет сетевую структуру зависимости агентов друг от друга.

Рассмотрим следующую схему организации функционирования системы. Центр делает первый ход, устанавливая агентам функции штрафов и назначая планы $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$. Затем каждый i-й агент выбирает свое решение y_i^*, стремясь получить максимальное значение своей целевой функции, зная при этом значение плана и прогнозируя выбор решений другими агентами.

Выбор решения i-м агентом в зависимости от выборов других агентов описывается следующими соотношениями:

(1) $$y_i^* \in R_i\ (x_i, \overline{y}_{-i}) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in Y} f_i(x_i, \overline{y}),$$

где $\overline{y}_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$.

Будем предполагать выполнение «условия благожелательности» агентов, которое заключаются в следующем: если $x_i \in R_i\ (x_i, \overline{y}_{-i})$, то $R_i\ (x_i, \overline{y}_{-i}) = x_i$, т.е. если план входит в множество «выгодных» для агента решений, то он выберет решение, равное плану. Заметим, что выполнение условия благожелательности центр может обеспечить, назначив агенту небольшое дополнительное вознаграждение $\delta_i > 0$ за выполнение плана.

Множество $\overline{R}(\overline{x})$ равновесных решений $\overline{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ системы агентов определяется выполнением для $\overline{y}^*$ условий (1) и условий благожелательности при всех i.

Задача 1. Охарактеризовать множество X^* равновесных планов $\overline{x}^*$ таких, что $\overline{R}(\overline{x}^*) = \{\overline{x}^*\}$, где $\overline{x}^*$ равно набору решений агентов $\overline{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$, в котором $y_i^* = x_i^*$, $i = 1, ..., n$.

Множество X^* назовем *множеством равновесных планов.*

Введем в рассмотрение и расширим некоторые положения о согласованности [3,5] в рассматриваемой сетевой структуре.

Назовем

$$P_i(\overline{x}_{-i}) = \{x_i \in Y_i \mid h_i(x_i) - \sum_{j=1\ \ j\neq i}^{n} \chi_{ji}(x_j, x_i) \geq h_i(y_i) - \chi_{0i}(x_i, y_i) - \sum_{j=1\ \ j\neq i}^{n} \chi_{ji}(x_j, y_i),\ \forall y_i \in Y_i\}$$

условным множеством согласованных планов i-го агента. В это множество включены планы i-го агента, которые агенту выгодно «выполнять» при условиях выполнения своих планов всеми другими агентами.

Будем называть систему штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y}) = \{\chi_{0i}(x_i, y_i) \mid i = 1, ..., n\}$ для i-го агента *максимально согласованной (МС)*, если выполняется соотношения

$\bigcup_{x \in Y_i} R_i\ (x, \overline{x}_{-i}) = P_i(\overline{x}_{-i})$, где $\overline{x}_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ представляет собой набор планов остальных агентов.

В случае присутствия в системе единственного агента, т.е. при n=1, показано [3,5], что для максимальной согласованности штрафов достаточно, чтобы штрафы были *сильно согласованы (СС)*. Штрафы $\chi_{0i}(y, x)$ являются сильно согласованными, если для них выполняются неравенства «треугольника»

(2) $$\chi_{0i}(z, x) \le \chi_{0i}(z, y) + \chi_{0i}(y, x) \text{ для всех } x, y, z \in Y_i .$$

Теорема 1. *Если система штрафов* $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$ *сильно согласована и* $X^* \ne \varnothing$*, то* $X^* = \{\overline{x}^* \,/\, x_i^* \in P_i(\overline{x}_{-i}^*), i = 1, ..., n\}$ *и решения агентов* $\overline{y}^* = \overline{x}^*$ *представляют собой равновесия по Нэшу.*

Доказательство теоремы 1. Если для всех $i = 1, ..., n$ справедливы неравенства (2), т.е. система штрафов является СС, то она является МС. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству в [3,5] для случая единственного агента, поэтому здесь не приводится. В силу полунепрерывности сверху целевых функций агентов и компактности множеств допустимых решений и планов, множества $P_i(\overline{x}_{-i}) \ne \varnothing$ при любых допустимых значениях $\overline{x}_{-i}$. Рассмотрим некоторых равновесный план $\overline{x}^*$ из множества X^*. Для этого плана по определению множества X^* для всех $i = 1, ..., n$ имеет место $x_i^* \in R_i\ (x_i^*, x_{-i}^*)$. Отсюда вытекает справедливость неравенства $h_i(x_i^*) - \sum_{j=1\ j \ne i}^{n} \chi_{ji}(x_j^*, x_i^*) \ge h_i(y_i) - \chi_{0i}(x_i^*, y_i) - \sum_{j=1\ j \ne i}^{n} \chi_{ji}(x_j^*, y_i)$ при всех $y_i \in Y_i$. Следовательно $x_i^* \in P_i(\overline{x}_{-i}^*)$. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда $Y_i = Y$ для всех $i = 1, ..., n$ и $\overline{x} = (x, ..., x)$, т.е. для всех агентов назначается одинаковый (*консолидированный*) план, равный x. Кроме того вместо системы функций штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$ в формулировке теоремы 1 подставим систему штрафов и потерь $\overline{\chi}(\overline{x}, \overline{y}) = \{\chi_{0i}(x, y_i) + \sum_{j=1\ i \ne j}^{n} \chi_{ji}(x, y_i) \,|\, i = 1, ..., n\}$.

Тогда для этого случая теорема 1 может сформулирована в следующем виде [4].

Следствие. *Если система штрафов и потерь* $\overline{\chi}(\overline{x}, \overline{y})$ *сильно согласована, то* $x^* \in X^* = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$*, где* $P_i = \{x \in Y \,|\, h_i(x) \ge h_i(y_i) - \chi_{0i}(x, y_i) - \sum_{j=1\ i \ne j}^{n} \chi_{ji}(x, y_i),\ \forall y_i \in Y\}$.

Заметим, что консолидированный равновесный план из множества X^* определяет равновесие по Нэшу в симметричной игре n агентов [7, 8].

Задача 2. Для заданного плана $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ определить систему штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$ такую, что $\overline{y}^* = \overline{x}$, т.е. равновесный выбор решений $\overline{y}^*$ совпадает с заданным планом.

Для функций потерь $\chi_{ji}(x_j, y_i)$ введем в рассмотрение функции максимального роста [5] $\theta_{ji}(y_j, y_i) = \max_{z \in Y}[\chi_{ji}(z, y_i) - \chi_{ji}(z, y_j)]$. Заметим, что $\theta_{ji}(y_j, y_i)$ по построению являются СС [5].

Представим функции штрафов в виде $\chi_{0i}(x_i, y_i) = \chi_{0i}^{\circ}(x_i, y_i) + \sum\limits_{j \neq i,\ j=1}^{n} \chi_{0i}^{j}(x_i, y_i)$.

Теорема 2. *Если штрафы* $\chi_{0i}^{\circ}(x_i, y_i)$ *являются СС, план* $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ *такой, что* $x_i \in P_i^{\circ} = \{x \in Y_i \,|\, h_i(x) \geq h_i(y_i) - \chi_{0i}^{\circ}(x, y_i),\ y_i \in Y_i\}$ *и* $\chi_{0i}^{j}(x_i, y_i) \geq \theta_{ji}(x_i, y_i)$ *при всех* $y_i \in Y$, *то* $\overline{y}^* = \overline{x}$ *как доминантные стратегии.*

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим выбор решения *i*-м агентом при плане $x_i \in P_i^{\circ}$. Для того, чтобы решение, равное x_i, было выбрано агентом как доминантная стратегия, необходимо выполнение следующего неравенства при $\forall y_i, y_j \in Y$:

$$h_i(x_i) - \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \chi_{ji}(y_j, x_i) \geq h_i(y_i) - \chi_{0i}^{\circ}(x_i, y_i) - \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \chi_{0i}^{j}(x_i, y_i) - \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \chi_{ji}(y_j, y_i). \tag{3}$$

Так как по предположению $x_i \in P_i^{\circ}$, а следовательно $h_i(x) \geq h_i(y_i) - \chi_{0i}^{\circ}(x, y_i)$, то для справедливости (3) достаточно выполнения неравенств

$$\chi_{0i}^{j}(x_i, y_i) \geq \chi_{ji}(y_j, y_i) - \chi_{ji}(y_j, x_i), \tag{4}$$

и тем более, с учетом условия теоремы, неравенств

$$\chi_{0i}^{j}(x_i, y_i) \geq \theta_{ji}(x_i, y_i) \geq \chi_{ji}(y_j, y_i) - \chi_{ji}(y_j, x_i). \tag{5}$$

Последнее неравенство в цепочке неравенств (5) справедливо по определению функции максимального роста $\theta_{ji}(x_i, y_i)$. Теорема 2 доказана.

Обозначим Y_0^* множество всех равновесий по Нэшу, $\overline{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$, в случае, когда все функции штрафов за отклонение решений от плана тождественно равны 0, т.е. $\chi_{0i}(x_i, y_i) \equiv 0$ при всех $x_i, y_i \in Y,\ i = 1, ..., n.$ В этом случае планы центром не назначаются. Пусть теперь центр назначил некоторые функции штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$, и X^* – множество равновесных планов при некотором «не нулевом» наборе функций штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$.

$$Y_0^* = \{\overline{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*) \,|\, h_i(y_i^*) - \chi_{ji}(y_j^*, y_i^*) \geq h_i(y_i) - \chi_{ji}(y_j, y_i),\ \forall y_i \in Y_i, y_j \in Y_j\},$$

где $y_i^* \in Y_i,\ y_j^* \in Y_j,\ i, j = 1, ..., n.$

Задача 3. Определить набор функций штрафов $\overline{\chi}_0(\overline{x}, \overline{y})$, при котором множество равновесных планов $X^* \supseteq Y_0^*$.

Другими словами, в этой задаче требуется для сетевой структуры, определяемой некоторым исходным набором функций потерь, выбрать набор штрафов, который позволит центру назначить в качестве выполняемого плана любое из равновесных решений при исходном наборе функций потерь, т.е. все равновесия в сетевой структуре входят в множество равновесных планов.

Теорема 3. *Если* $\chi_{0i}(x_i, y_i) = 2\sum\limits_{j \neq i,\ j=1}^{n} \theta_{ji}(x_i, y_i),$ *то*

a) $X^* \supseteq Y_0^*$, X^* – множество равновесий в доминантных стратегиях;

b) $X^* \supseteq \{\overline{x}^* \,/\, x_i^* \in P_i(\overline{x}_{-i}^*), i = 1, ..., n\}$, где

$$P_i(\overline{x}_{-i}) = \{x_i \in Y_i \mid h_i(x_i) \geq h_i(y_i) - \sum_{j \neq i,\, j=1}^{n} \theta_{ji}(x_j, y_i),\ \forall y_i \in Y_i\};$$

c) *оптимальный план* $\overline{x}^*$ определяется из решения задачи

$$F(\overline{x}^*, \overline{x}^*) = \max_{\overline{x} \in X^*} F(\overline{x}, \overline{x}).$$

Доказательство теоремы 3. Примем $\overset{\circ}{\chi}_{0i}(x_i, y_i) = \sum_{j \neq i,\, j=1}^{n} \theta_{ji}(x_i, y_i)$ и $\sum_{j \neq i,\, j=1}^{n} \chi_{0i}^{j}(x_i, y_i) = \sum_{j \neq i,\, j=1}^{n} \theta_{ji}(x_i, y_i)$. Воспользуемся результатом и доказательством теоремы 2. В [5] показано, что множество стратегий, совпадающих с согласованным планом, при функции штрафов, равной $\theta_{ji}(y_j, y_i)$, включает множество выбираемых агентом стратегий при функции штрафов, равной функции потерь $\chi_{ji}(y_j, y_i)$. Отсюда следует справедливость утверждений *a*) и *b*) теоремы. Утверждение *c*) следует из *a*) и *b*), т.е. все решения, выбираемые агентами, совпадают с назначаемыми согласованными планами, поэтому максимум целевой функции центра достигается при выполнении плана на множестве равновесных согласованных планов. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Белов М.В., Новиков Д.А. Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования // Проблемы управления. 2018. № 1. С. 47-57.
2. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. 256 с.
3. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В. Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования // Автоматика и телемеханика. 1980. № 6. С. 110-116.
4. Еналеев А.К. Консолидированные равновесия в согласованной активной системе с сетевой структурой // Материалы 10-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления МКПУ-2017. Дивноморское-Геленджик. 11сентября – 16 сентября 2017 г. Ростов-на Дону - Таганрог: Южный федеральный университет. 2017. Т. 3. С. 23-25.
5. Еналеев А. К. Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. 2011. Выпуск 33. С. 143-166.
   Enaleev A.K. Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, No. 3. P. 491-505.
6. Enaleev A.K. Optimal Mechanism at Network Active Systems // Proceedings of 11th IEEE Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD'2018). Moscow, 2018. https://ieeexplore.ieee.org/document/8551780.
7. Amir R., Jakubczyk M., and Knauff M. Symmetric versus asymmetric equilibria in symmetric supermodular games // International Journal of Game Theory. 2008. Vol. 37. P. 307-320.
8. Hefti A. Equilibria in symmetric games: Theory and applications // Theoretical Economics. 2017. No.12. P. 979-1002.