

ПАРЕТОВСКИЕ РАВНОВЕСИЯ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

В.И. Жуковский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, Москва, ул. Воробьевы горы, д. 1, стр. 52

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

С.П. Самсонов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Россия, 119991, Москва, ул. Воробьевы горы, д. 1, стр. 52

E-mail: samsonov@cs.msu.su

Ключевые слова: бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, активное равновесие, равновесие угроз и контругроз.

Аннотация: Отсутствие внешней и внутренней устойчивости множества равновесных по Нэшу ситуаций приводит неизбежно к формализации новых понятий равновесных решений в бескоалиционных играх. Одному из таких равновесий и посвящена настоящая работа. В ней приведен пример дифференциальной линейно-квадратичной позиционной игры трех лиц, в которой найден явный вид равновесия угроз и контругроз и доказано отсутствие в этой игре ситуации равновесия по Нэшу. Предполагается в дальнейшем предложенным способом исследовать вопрос устойчивости коалиционных структур в дифференциальной игре трех лиц.

По мнению корифеев математической теории игр равновесию, как решению дифференциальной игры должно быть присуще свойство устойчивости: отклонение от него отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклонившегося. Однако даже «царствующее» здесь равновесие по Нэшу не обладает этим свойством. Так в бескоалиционной игре двух лиц

$$\left\langle \{1, 2\}, \{X_i = [-1, +1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \right\rangle$$

множество X^e равновесных по Нэшу ситуаций

$$X^e = \{(\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\},$$

во-первых, внутренне неустойчиво, ибо для $x^{(1)} = (0, 0)$ и $x^{(2)} = (1, 1)$ будет $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ ($i = 1, 2$) и поэтому X^e внутренне неустойчиво. Во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = f_i(0, 0) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ($i = 1, 2$) и поэтому X^e внешне неустойчиво.

Избежать последствия внутренней и внешней неустойчивости X^e позволила бы максимальность по Парето элементов X^e . Однако максимальность по Парето и одновременно равновесность по Нэшу явление скорее экзотическое для бескоалиционных дифференциальных игр. Поэтому в предлагаемом сообщении рассматривается равновесие угроз и контругроз (РУИК), обладающее указанным свойством устойчивости и, в отличие от равновесия по Нэшу, оптимальностью по Парето.

Теоретической основой настоящего доклада являются работы по коалиционным играм [1-3] и по дифференциальным играм – [4-6].

Рассматриваем линейно-квадратичную дифференциальную позиционную игру трех лиц в нормальной форме.

$$\Gamma_3 = \left\langle \{1, 2, 3\}, \Sigma, \{\mathfrak{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \right\rangle,$$

где управляемая динамическая система $\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^3 u_i$, $x(t_0) = x_0$, $A(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$; $x, u \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta = \text{const} > 0$, $0 \leq t \leq \vartheta$, $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ – позиция игры, (t_0, x_0) – начальная позиция; $\mathfrak{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\}$; $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$; $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathfrak{U} = \prod_{i=1}^3 \mathfrak{U}_i$, $u \div U(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$,

$$J_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u_j'[t] D_{ij} u_j[t] dt \quad (i = 1, 2, 3).$$

Перейдем к формализации:

1) U^P – **максимально по Парето** в Γ_3 : $\forall U \in \mathfrak{U}$ несовместна система неравенств $J_i(U, t_0, x_0) \geq J_i(U^P, t_0, x_0)$ ($i = 1, 2, 3$), из которых, по крайней мере, одно строгое.

2) **Угроза 1-го на U^P** : $\exists U_1^t \in \mathfrak{U}_1$,

$$J_1(U_1^t, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U^P, t_0, x_0) \quad \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n;$$

Контругроза (полная) 2-го на угрозу 1-го: $\exists U_2^c \in \mathfrak{U}_2$: $J_1(U_1^t, U_2^c, U_3^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0) \wedge J_2(U_1^t, U_2^c, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^t, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)$.

Определение 1. Ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$ называется равновесной по угрозе и контругрозе (РУИК) для Γ_3 , если при $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$

1) U^P максимальна по Парето для Γ_3 ;

2) в ответ на любую угрозу на U^P любого игрока хотя бы у одного из оставшихся имеется полная контругроза.

Далее $D > 0$ (< 0) означает, что квадратичная форма $u'Du$ определено положительна (отрицательна); постоянные $n \times n$ - матрицы D_{ij} , C_i ($i, j = 1, 2, 3$) в Γ_3 симметричны, тогда корни характеристических уравнений $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ вещественны; кроме того $D_{ii} > 0 \Rightarrow \Lambda_{ii} = \max_{0 \leq i \leq n} a_i / a_{i-1}$ и $D_{ij} < 0 \Rightarrow u_j' D_{ij} u_j \leq -\lambda_{ij} \|u_j\|^2$ (Λ_{ii} и $-\lambda_{ij}$ – наибольшие корни соответствующих характеристических уравнений), числа $\Lambda_{ii} > 0$, $\lambda_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$). Далее используем векторную и матричные однородные системы уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t)x$,

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), X(\vartheta) = E_n; \frac{d(X^{-1}(t))'}{dt} = -A(t)'(X^{-1}(t))', \frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)A(t),$$

$$X^{-1}(\vartheta) = (X^{-1}(\vartheta))' = E_n, n \times n \text{ матрицы } C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3, D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3},$$

$$(i = 1, 2, 3), \text{ числа } \beta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right\}, \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right] \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right\}.$$

Теорема 1. Пусть в Γ_3 матрицы $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$, $C_i < 0$ ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$) и $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}$. Тогда U^P в РУИК существует и имеет вид $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div \div (-D_1^{-1}\Theta(t)x, -D_2^{-1}\Theta(t)x, -D_3^{-1}\Theta(t)x)$, здесь симметричная $n \times n$ матрица

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1} + \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau) (D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}) (X^{-1}(\tau))' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t).$$

Список литературы

1. Льюс Р.Д. и Райфа Х. Игры и решения. М.: ИЛ, 1961. 641 с.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, ЛКИ/URSS. 2010. 216 с.
3. Вилкас Э.И., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование М.: Радио и Связь, 1981. 328 с.
4. Вайсборд Э.М. О коалиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 613-623.
5. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложение М.: Советское Радио, 1980. 304 с.
6. Vaisbord E.M., Zhukovskiy V.I. Introduction to Multi Player Differential Games and thier Application. New York: Gordon and Breach, 1983. 581 p.