УДК 519.83

ЗАШУМЛЕННЫЕ ИГРЫ С ТЕРНАРНЫМ ВЫБОРОМ НА ГРАФАХ

А.В. Леонидов
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект 53
E-mail: leonidov@lpi.ru

Ключевые слова: Равновесие дискретного отклика, игры с тернарным выбором, игры на графах.

Аннотация: Рассматриваются статическое равновесие дискретного отклика (РДО) в зашумленных играх с тернарным выбором на графах.

1. Введение

Опираясь на аналогии с результатами, полученными в рамках статистической физики на графах [1] естественно ожидать, что характеристики равновесия дискретного отклика [2] существенно зависят от числа рассматриваемых альтернативных стратегий. Имеющийся в литературе анализ игр с количеством альтернатив, большим двух, ограничивается рассмотрением мультиномиального распределения, см. напр. [3]. Случай произвольных распределений для шума в задаче с бинарным выбором был рассмотрен в [4]. В настоящей работе мы исследуем характеристики равновесия дискретного отклика для тернарного выбора для произвольных распределений по шуму.

2. Статическое равновесие дискретного отклика для тернарного выбора на графах

2.1. Общие соотношения

Рассмотрим общий случай статического равновесия дискретного отклика с Q альтернативами в игре N агентов на графе. Пространство альтернатив удобно характеризовать Q единичными векторами $\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^Q$, симметрично направленными в вершины гипертетраедра в пространстве размерности $Q-1$ [5]. В задаче бинарного выбора это противонаправленные единичные вектора на прямой, $\mathbf{e}^1 = (1,0)^\intercal$, $\mathbf{e}^2 = (0,1)^\intercal$. В рассматриваемом случае тернарного выбора удобно выбрать параметризацию состояний вида

$$\mathbf{e}^1 = (0,1)^\intercal, \quad \mathbf{e}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal, \quad \mathbf{e}^3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal \tag{1}$$

Ожидаемая полезность для агента i от выбора $\mathbf{s}_i$ предполагается равной

$$\langle U_i(\mathbf{s})\rangle = \sum_j J_{ij} g_{ij} (\mathbf{s}_i \cdot E_{(i)}(\mathbf{s}_j)) + \epsilon_{\mathbf{s}_i} \tag{2}$$

где J_{ij} - матрица констант взаимодействия, g_{ij} - матрица смежности графа, $E_{(i)}(\mathbf{s}_j)$ - оценка агентом i ожидаемого выбора агента j и $\epsilon_{\mathbf{s}_i}$ - случайные величины с нулевым средним, характеризующиеся для каждого агента *одинаковыми* дифференциальными распределениями $\phi^\tau(\epsilon_{\mathbf{e}_\tau})$.

Выпишем явное выражение для $E_{(i)}(\mathbf{s}_j)$:

$$E_{(i)}(\mathbf{s}_j) = \sum_{\tau=1}^{3} p_{j(i)}\left(\mathbf{s}_j = \mathbf{e}^\tau\right)\mathbf{e}^\tau \equiv \sum_{\tau=1}^{3} p^\tau_{j(i)} \mathbf{e}^\tau \tag{3}$$

Для вероятности $P_i^{\alpha>\beta}$ предпочесть состояние α состоянию β имеем соответственно

$$P_i^{\alpha>\beta} = \text{Prob}\left[\langle U_i(\mathbf{e}^\alpha)\rangle > \langle U_i(\mathbf{e}^\beta)\rangle\right] = F_<^{\alpha,\beta}\left[\sum_j J_{ij} g_{ij}\left((\mathbf{e}^\alpha - \mathbf{e}^\beta)\cdot E_{(i)}(\mathbf{s}_j)\right)\right] \tag{4}$$

где $F_<^{\alpha,\beta}(z)$ - функция распределения для разности $\epsilon_{\mathbf{e}^\beta} - \epsilon_{\mathbf{e}^\alpha}$

$$F_<^{\alpha,\beta}(z) = \int^z dz_1 f^{\alpha,\beta}(z_1), \quad f^{\alpha,\beta}(z_1) = \int dz_2\, \phi^\alpha(z_2)\phi^\beta(z_2+z_1) \tag{5}$$

Используя далее явную параметризацию (1), окончательно получаем

$$P_i^{\alpha>\beta}(\{p^\alpha_{j(i)}, p^\beta_{j(i)}\}) = F_<^{\alpha,\beta}\left[\frac{3}{2}\sum_j J_{ij} g_{ij}(p^\alpha_{j(i)} - p^\beta_{j(i)})\right] \tag{6}$$

Равновесию дискретного отклика отвечает самосогласованный набор вероятностей $((p_1^\alpha, p_1^\beta), \cdots, (p_N^\alpha, p_N^\beta))$ такой, что для всех $\tau = (\alpha, \beta)$ и всех $i, j = 1, \cdots, N$ имеет место равенство

$$p^\tau_{j(i)} = p^\tau_j \tag{7}$$

В результате получаем систему уравнений на вероятности p_i^τ, определяющие равновесие дискретного отклика:

$$p_i^\alpha(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) = \frac{P_i^{\alpha>\beta}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) P_i^{\alpha>\gamma}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\})}{Z(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\})}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} Z(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) &= P_i^{\alpha>\beta}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) P_i^{\alpha>\beta}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) + P_i^{\beta>\alpha}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) P_i^{\beta>\gamma}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) \\ &+ P_i^{\gamma>\alpha}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) P_i^{\gamma>\beta}(\{p_j^\alpha, p_j^\beta\}) \end{aligned} \tag{9}$$

3. РДО на полном графе

Для полного графа вероятности p_τ находиться в одном из трех состояний одинаковы для всех узлов, так что ожидаемая полезность от решения $\mathbf{s}$ равна

$$\langle U(\mathbf{s})\rangle = \frac{J}{N}(N-1)(\mathbf{s}\cdot E(\mathbf{s})) + \epsilon_{\mathbf{s}} \sim J(\mathbf{s}\cdot E(\mathbf{s})) + \epsilon_{\mathbf{s}} \tag{10}$$

Для дальнейшего анализа удобно воспользоваться следующей параметризацией p_τ [5]

$$p_1 = \frac{1}{3}(1+2m), \quad p_2 = \frac{1}{3}(1-m), \quad p_3 = \frac{1}{3}(1-m) \tag{11}$$

В выбранной параметризации выполняется соотношение

$$E(\mathbf{s}) = \sum_\tau p_\tau \mathbf{e}^\tau = m\mathbf{e}^1, \tag{12}$$

так что

$$P^{\alpha>\beta} = F_<^{\alpha,\beta}\left[Jm(\mathbf{e}^\alpha - \mathbf{e}^\beta)\cdot\mathbf{e}^1\right] \tag{13}$$

Выражения для равновесных вероятностей принимают

$$p_1 = \frac{F_<^{1,2}\left(\frac{3}{2}Jm\right)F_<^{1,3}\left(\frac{3}{2}Jm\right)}{Z(m)}, \quad p_2 = p_3 = \frac{F^{2,3}(0)\left(1-F_<^{1,2}\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)}{Z(m)}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} Z(m) &= F_<^{1,3}\left(\frac{3}{2}Jm\right)F_<^{1,3}\left(\frac{3}{2}Jm\right) + F^{2,3}(0)\left(1-F_<^{1,2}\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right) \\ &+ F^{3,1}(0)\left(1-F_<^{1,3}\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Для обычно рассматриваемого случая одинаковых распределений $F_<^{\alpha,\beta} = F_<$ для всех α, β получаем компактные формулы для равновесных вероятностей следующего вида:

$$p_1 = \frac{F_<^2\left(\frac{3}{2}Jm\right)}{F_<^2\left(\frac{3}{2}Jm\right) + 2F_<(0)\left(1-F_<\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)} \tag{16}$$

$$p_2 = p_3 = \frac{F_<(0)\left(1-F_<\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)}{F_<^2\left(\frac{3}{2}Jm\right) + 2F_<(0)\left(1-F_<\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)} \tag{17}$$

и, соответственно, уравнение на параметр ассиметрии ("параметр порядка") m:

$$m = \frac{F_<^2\left(\frac{3}{2}Jm\right) - F_<(0)\left(1-F_<\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)}{F_<^2\left(\frac{3}{2}Jm\right) + 2F_<(0)\left(1-F_<\left(\frac{3}{2}Jm\right)\right)} \equiv \Phi(Jm) \tag{18}$$

Перестройка пространства решений от симметричного с $m=0$ к решению с нарушенной симметрией между вероятностями состояний $m \neq 0$ происходит в точке

$$\left.\frac{d\Phi(Jm)}{dm}\right|_{m=0} = 1 \tag{19}$$

4. Заключение

В докладе рассмотрена задача о нахождении равновесия дискретного отклика с тернарным выбором на графе. Получены общие уравнения для равновесных вероятностей, подробно рассмотрен частный случай полного графа, для которого равновесие дискретного отклика характеризуется решениями нелинейного уравнения специального вида.

Список литературы

1. Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F, Critical phenomena in complex networks // Reviews of Modern Physics. 2008. Vol. 80, No. 4. P. 1275.
2. McKelvey R.D., Palfrey, T. R. Quantal response equilibria for normal form games // Games and economic behavior. 1995. Vol. 10, No. 1. P. 6.
3. Blume L. E., Brock, W. A., Durlauf S.N., Ioannides Y. M. Identification of social interactions // Handbook of social economics. 2011. Vol. 1. P. 853
4. Blume L., Durlauf S. Equilibrium Concepts for Social Interaction Models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5. No. 3. P. 193.
5. Wu, F-Y., The Potts model // Reviews of modern physics. 1982. Vol. 54, No. 1. P. 2735.