УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ ДИСКРЕТНОГО ОТКЛИКА В ЗАШУМЛЕННЫХ ИГРАХ С БИНАРНЫМ ВЫБОРОМ НА ГРАФАХ

А.В. Леонидов
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект 53
E-mail: leonidov@lpi.ru

А.В. Савватеев
Кавказский Математический Центр при Адыгейском ГУ
Россия, 385000, Майкоп, Первомайская улица, 208
E-mail: hibiny@mail.ru

А.Г. Семенов
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект 53
E-mail: semenov@lpi.ru

Ключевые слова: Равновесие дискретного отклика, игры с бинарным выбором, игры на графах, эволюционные игры.

Аннотация: Рассматриваются статическое и динамическое равновесия дискретного отклика (РДО) в зашумленных играх с дискретным выбором на графах.

1. Введение

В докладе рассматривается статическое и динамическое равновесия дискретного отклика (Quantal Response Equilibrium) [1] в задачах с бинарным выбором на графах. Полученные результаты обобщают результаты работы [2] по двум направлениям. Во-первых, показано, что статическое равновесие на полном графе, рассмотренное в [2], является равновесием дискретного отклика. Во-вторых, дан вывод уравнений для статического и динамического равновесий дискретного отклика в задаче с бинарным выбором на крафах с произвольной топологией.

2. Статическое равновесие дискретного отклика на графах

2.1. Общие соотношения

Рассмотрим статическое равновесие дискретного отклика в игре N агентов с бинарным выбором $s_i = \pm 1$, $i = 1, \cdots N$ на графе $\mathcal{G}$ с матрицей смежности g_{ij}. Ожидаемая полезность от выбора s_i для i-го агента предполагается равной

$$\langle U_i(s_i) \rangle = \left[H_i + \sum_{j \neq i} g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right] s_i + \epsilon_{s_i}, \tag{1}$$

где H_i параметризует идиосинкратическую склонность к выбору $s_i = \mathrm{sign}(H_i)$, J_{ij} - матрица констант взаимодействия, $\langle s_j \rangle_{(i)}$ - оценка агентом i ожидаемого выбора агента j и ϵ_{s_i} - случайные величины с нулевым средним, характеризующиеся для каждого агента *одинаковыми* дифференциальными распределениями $\phi^{(i)}(\epsilon_{s_i})$. Из уравнения (1) следует, что вероятность p_{s_i} выбора стратегии s_i агентом i равна

$$p_{s_i} = F_<^{(i)} \left(\left[2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right] s_i \right), \tag{2}$$

где $F_<^{(i)}(z)$ - функция распределения для разности $\epsilon_{-s_i} - \epsilon_{s_i}$ для агента i. В частности. вероятность p_i^+ выбора $s_i = 1$ равна тем самым

$$p_i^+ = F_<^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} \langle s_j \rangle_{(i)} \right), \tag{3}$$

где, соответственно, $F_<^{(i)}(z)$ - функция распределения для агента i разности $\epsilon_- - \epsilon_+$

$$F_<^{(i)} = \int^z dz_1 f^{(i)}(z_1), \qquad f^{(i)}(z_1) = \int dz_2 \, \phi^{(i)}(z_2) \phi^{(i)}(z_2 + z_1) \tag{4}$$

Равновесию дискретного отклика $(p_1^+, \cdots, p_N^+)$ отвечает согласованность смешанных стратегий игрков и их ожиданий относительно смешанных стратегий их соседей по графу, т.е. выполнение для $\forall j, i$ равенства

$$\langle s_j \rangle_{(i)} = 2p_j^+ - 1, \tag{5}$$

и, соответственно, уравнениям для равновесных вероятностей p_i^+ равновесия дискретного отклика

$$p_i^+ = F_<^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} (2p_j^+ - 1) \right), \quad \forall i \tag{6}$$

Удобно переписать уравнения (6) как уравнения на равновесные средние $m_i = 2p_i^+ - 1$:

$$m_i = 2F_<^{(i)} \left(2H_i + 2 \sum_j g_{ij} J_{ij} m_j \right) - 1 \tag{7}$$

2.2. РДО на полном графе

Рассмотрим случай полного графа в простейших предположениях $J_{ij} = J/N$, $H_i = H$ и $F^{(i)}_<(z) = F_<(z)$ для всех i, j. В этом случае равновесие для всех агентов одинаково, $m_i = m\ \forall i$, так что равновесие дискретного отклика полностью характеризуется уравнением

$$m = 2F_< [2H + 2Jm] - 1, \tag{8}$$

т.е. в точности обобщенное уравнение Кюри-Вайса, полученное в работе [2]. Тем самым доказано, что изучавшиеся ранее равновесия в задаче с зашумленным бинарным выбором на полном графе являются равновесиями дискретного отклика.

Отметим также, что в случае $H = 0$ в задаче имеется универсальная перестройка пространства решений (8) в точке $4Jf(0) = 1$, так что при $4Jf(0) < 1$ имеется только решение $m = 0$, а при $4Jf(0) > 1$ появляются пара дополнительных решений $\pm m \neq 0$.

2.3. РДО на графе в замороженном (annealed) приближении

Рассмотрим равновесие дискретного оклика в рассматриваемой задаче (7) на графе с произвольной топологией в замороженном (annealed) приближении, см., напр., обзор [3]. В этом приближении матричные элементы матрицы смежности g_{ij} заменяются на вероятности формирования ребра между узлами i, j со степенями k_i, k_j в конфигурационной модели:

$$g_{ij} \simeq \frac{k_i k_j}{N\langle k\rangle} \tag{9}$$

В этом приближении систему уравнений (7) можно переписать в виде

$$m_{k_i} = 2F_< \left[2H + 2Jk_i \sum_k \frac{kp_k}{\langle k\rangle} m_k\right] - 1, \tag{10}$$

где $\{p_k\}$ - распределение по верятностям степеней вершин графа и

$$m_k = \langle\sigma_j\rangle|_{k_j=k} \equiv 2p^+_k - 1 \tag{11}$$

Систему уравнений (11) удобно переписать в виде уравнения на взвешенное среднее

$$m_w = \sum_k \frac{kp_k}{\langle k\rangle} m_k, \tag{12}$$

так что соответствующее обобщенное уравнение Кюри-Вайса для m_w имеет вид

$$m_w = \sum_k \frac{kp_k}{\langle k\rangle} 2F_< [2H + 2Jkm_w] - 1 \tag{13}$$

Отметим, что при $H = 0$ в рассматриваемом приближении перестройка решений для m_w имеет место в точке

$$4J\langle k^2\rangle f(0) = \langle k\rangle \tag{14}$$

3. Динамическое равновесие дискретного отклика на графах

Состояние системы полностью характеризуется функцией распределения

$$P(\{s\}(t)) = P[s_1(t), s_2(t), \cdots s_N(t)], \tag{15}$$

характеризующий вероятность обнаружения системы в состоянии $\{s\}(t)$ в момент времени t, Отметим, что в предположении о независимости решений, принимаемых агентами, функция распределения факторизуется:

$$P(\{s\}(t)) = P[s_1(t), s_2(t), \cdots s_N(t)] = \prod_{i=1}^{N} p(s_i(t)) \tag{16}$$

Драйвером эволюции системы во времени являются переходы $s_i(t) \to -s_i(t)$, которые предполагаем происходящими с вероятностью в единицу времени $w(s_i \to -s_i)$. Соответствующее уравнение эволюции (мастер-ураавнение) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\{s\}(t))}{dt} &= \sum_i [w(-s_i \to s_i) P(s_1, \cdots, -s_i, \cdots s_N) \\ &\quad - w(s_i \to -s_i) P(s_1, \cdots, s_i, \cdots s_N)] \end{aligned} \tag{17}$$

Из уравнения (17) следуют уравнения для эволюции средних в узлах $m_i(t) = \langle s_i \rangle_{P(\{s\}(t))}$

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -2\langle s_i(t) w(s_i \to -s_i)\rangle_{P(\{s\}(t))} \tag{18}$$

Вероятность перехода в единицу времени $w(s_i \to -s_i)$ естественно выбрать в следующем виде [2]

$$w(s_i \to -s_i) = \lambda p_{-s_i} = \lambda F_<^{(i)} \left(- \left[2H_i + 2\sum_j g_{ij} J_{ij} s_j(t) \right] s_i(t) \right), \tag{19}$$

где вероятность p_{-s_i} определена в (2). Для вывода уравнений эволюции для $m_i(t)$ удобно воспользоваться тождеством

$$p_{-s_i} = \frac{1}{2}[1 - s_i(s_i p_{s_i} - s_i p_{-s_i})] \equiv \frac{1}{2}[1 - s_i \langle s_i \rangle] \tag{20}$$

Тогда из уравнений ((18),(19),(20)) следует, что

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -\lambda \left\{ m_i(t) - \left(2F_<^{(i)} \left[2H_i + 2\sum_j g_{ij} J_{ij} m_j(t) \right] - 1 \right) \right\} \tag{21}$$

и, тем самым, при выборе (19) равновесие дискретного отклика (7) является стационарной точкой рассматриваемой эволюционной динамики.

Список литературы

1. McKelvey R.D., Palfrey, T. R. Quantal response equilibria for normal form games // Games and economic behavior. 1995. Vol. 10, No. 1. P. 6.
2. Blume L., Durlauf S. Equilibrium Concepts for Social Interaction Models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, No. 3. P. 193.
3. Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F, Critical phenomena in complex networks //Reviews of Modern Physics. 2008. Vol. 80, No. 4. P. 1275.