

# КООПЕРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А.Н. Реттиева

*Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Россия, 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

E-mail: [annaret@krc.karelia.ru](mailto:annaret@krc.karelia.ru)

**Ключевые слова:** динамические игры, многокритериальные игры, кооперативное равновесие, характеристическая функция, арбитражная схема Нэша.

**Аннотация:** Предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Исследован процесс формирования коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения характеристической функции используется арбитражная схема Нэша, где многокритериальное равновесие по Нэшу используется в качестве точек статус-кво. Предложено два варианта построения характеристической функции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). Исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

## 1. Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации типичны для теоретико-игровых моделей в экономике и экологии.

Все предложенные ранее концепции решений многокритериальных игр используются только в статическом варианте. Мало исследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [3] было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия, а в работе [4] – многокритериального некооперативного равновесия.

В данной работе предложенные подходы используются для построения кооперативных стратегий и выигрышей при формировании произвольной коалиции  $S \subset N$ . При этом исследованы два варианта построения характеристической функции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии

Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [1], а во втором – игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с  $N \setminus S$  игроками (модель с информацией).

Для иллюстрации предложенных концепций решений исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

## 2. Динамические многокритериальные игры

Рассмотрим динамическую многокритериальную игру с  $n$  игроками в дискретном времени с конечным горизонтом планирования. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития ресурса имеет вид

$$(1) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt}), \quad x_0 = x,$$

где  $x_t \geq 0$  – размер ресурса в момент времени  $t \geq 0$ ,  $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})$  – функция развития возобновляемого ресурса,  $u_{it} \in U_i$  – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока  $i$  в момент времени  $t \geq 0$ ,  $i \in N = \{1, \dots, n\}$ .

Обозначим профиль стратегий  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})$ . Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования  $[0, m]$  имеют вид

$$(2) \quad J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum_{t=0}^m \delta^t g_1^1(u_t) \\ J_1^2 = \sum_{t=0}^m \delta^t g_1^2(u_t) \end{pmatrix}, \dots, J_n = \begin{pmatrix} J_n^1 = \sum_{t=0}^m \delta^t g_n^1(u_t) \\ J_n^2 = \sum_{t=0}^m \delta^t g_n^2(u_t) \end{pmatrix},$$

где  $g_i^j(u_t) \geq 0$  – функции «мгновенного» выигрыша,  $j = 1, 2$ ,  $i \in N$ ,  $\delta \in (0, 1)$  – общий коэффициент дисконтирования.

### 2.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [3]. А именно, применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому, сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво. В работе [3] были предложены три варианта построения гарантированных выигрышей и показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является такой, где гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу. Поэтому в данной модели с  $n$  игроками ограничимся именно этим способом определения гарантированных точек:

$G_1^1, \dots, G_n^1$  – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре  $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^1\}_{i=1}^n \rangle$ ,  
 $G_1^2, \dots, G_n^2$  – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре  $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^2\}_{i=1}^n \rangle$ .

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль

точек стаус-кво:

$$H_1(u_t) = (J_1^1(u_t) - G_1^1)(J_1^2(u_t) - G_1^2),$$

...

$$H_n(u_t) = (J_n^1(u_t) - G_n^1)(J_n^2(u_t) - G_n^2).$$

**Определение 1.** Профиль стратегий  $u_t^N = (u_{1t}^N, \dots, u_{nt}^N)$  является многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1), (2), если

$$(3) \quad H_i(u_t^N) \geq H_i(u_{1t}^N, \dots, u_{i-1t}^N, u_{it}, u_{i+1t}^N, \dots, u_{nt}^N) \quad \forall u_{it} \in U_i, \quad i \in N.$$

## 2.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно, т.е. формируется гранд коалиция. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 1 примут вид

$$(4) \quad J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum_{t=0}^m \delta^t g_1^1(u_t^N) \\ J_1^{2N} = \sum_{t=0}^m \delta^t g_1^2(u_t^N) \end{pmatrix}, \dots, J_n^N = \begin{pmatrix} J_n^{1N} = \sum_{t=0}^m \delta^t g_n^1(u_t^N) \\ J_n^{2N} = \sum_{t=0}^m \delta^t g_n^2(u_t^N) \end{pmatrix}.$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, следовательно, необходимо решить следующую задачу:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n V_i^{1c} - \sum_{i=1}^n J_i^{1N} \right) \left( \sum_{i=1}^n V_i^{2c} - \sum_{i=1}^n J_i^{2N} \right) = \\ & = \left( \sum_{t=0}^m \delta^t (g_1^1(u_t^c) + \dots + g_n^1(u_t^c)) - J_1^{1N} - \dots - J_n^{1N} \right) \cdot \\ & \cdot \left( \sum_{t=0}^m \delta^t (g_1^2(u_t^c) + \dots + g_n^2(u_t^c)) - J_1^{2N} - \dots - J_n^{2N} \right) \rightarrow \max_{u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c}, \end{aligned}$$

где  $J_i^{jN}$  — некооперативные выигрыши, определенные в (4),  $j = 1, 2, i \in N$ .

**Определение 2.** Профиль стратегий  $u_t^c = (u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c)$  является многокритериальным кооперативным равновесием в игре (1), (2), если является решением задачи (5).

## 2.3. Формирование коалиции

Теперь предположим, что часть игроков объединяется в коалицию  $S$ . Для определения выигрыша коалиции также будем использовать арбитражную схему Нэша для всего периода продолжения игры. Исследуем два варианта, учитывающие наличие информации у игроков о формировании коалиции (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [?], а во втором — игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с  $N \setminus S$  игроками (модель с информацией).

**Модель с отсутствием информации.** В данном случае игроки, образовавшие коалицию  $S$ , не сообщают об этом другим участникам. Поэтому агенты, не входящие в коалицию, продолжают использовать стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта многокритериальной динамической игры.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции  $S$  решается следующая задача:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \left( \sum_{i \in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{1N} \right) \left( \sum_{i \in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{2N} \right) = \\ & = \left( \sum_{t=0}^m \delta^t \sum_{i \in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{1N} \right) \left( \sum_{t=0}^m \delta^t \sum_{i \in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{2N} \right) \rightarrow \max_{u_{it}, i \in S}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, & i \in S, \\ u_i^N, & i \in N \setminus S. \end{cases}$$

**Модель с информацией.** В данном случае игроки, не входящие в коалицию  $S$ , получают информацию о ее формировании. Поэтому они определяют свои новые стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в игре с  $N \setminus S$  игроками.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции  $S$  решается следующая задача:

$$(7) \quad \begin{aligned} & \left( \sum_{i \in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{1N} \right) \left( \sum_{i \in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{2N} \right) = \\ & = \left( \sum_{t=0}^m \delta^t \sum_{i \in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{1N} \right) \left( \sum_{t=0}^m \delta^t \sum_{i \in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{2N} \right) \rightarrow \max_{u_{it}, i \in S}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, & i \in S, \\ \tilde{u}_i^N, & i \in N \setminus S, \end{cases}$$

а стратегии  $\tilde{u}_i^N$  индивидуальных игроков определяются из решения задач

$$H_i = (J_i^1(u_t) - G_i^1)(J_i^2(u_t) - G_i^2) \rightarrow \max_{u_i, i \in N \setminus S}, i \in N \setminus S.$$

## 2.4. Характеристическая функция

Таким образом характеристическая функция для игры (1), (2), начинающейся в момент  $t$  из состояния  $x_t$  имеет вид

$$(8) \quad V(L, x_t) = \begin{cases} 0, & L = \emptyset, \\ V(\{i\}, x_t) = \begin{pmatrix} J_i^{1N}(u_t^N) \\ J_i^{2N}(u_t^N) \end{pmatrix}, & L = \{i\}, \\ V(S, x_t) = \begin{pmatrix} \sum_{i \in S} V_i^{1S}(u_t^S) \\ \sum_{i \in S} V_i^{2S}(u_t^S) \end{pmatrix}, & L = S, \\ V(I, x_t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n V_i^{1c}(u_t^c) \\ \sum_{i=1}^n V_i^{2c}(u_t^c) \end{pmatrix}, & L = I, \end{cases}$$

где  $J_i^{jN}(u_i^N)$  определены в (4),  $i \in N$ ,  $j = 1, 2$ ,  $V_i^{jS}(u_i^S)$  определяются из решения задач (6) или (7),  $i \in S$ ,  $j = 1, 2$ , а  $V_i^{jc}(u_i^c)$  определяются из решения задачи (5),  $i \in N$ ,  $j = 1, 2$ .

Для иллюстрации предложенных концепций решений исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Определены стратегии и выигрыши участников при формировании коалиции в двух вариантах. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №17-11-01079).

## Список литературы

1. Petrosjan L.A., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. of Econ. Dyn and Contr. 2003. Vol. 27, No. 3. P. 381-398.
2. Pieri G., Pusillo L. Multicriteria Partial Cooperative Games // App. Math. 2015. Vol. 6, No. 12. P. 2125-2131.
3. Rettieva A.N. Equilibria in dynamic multicriteria games // Int. Game Theory Rev. 2017. Vol. 19, No. 1. P. 1750002.
4. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6, No. 9. P. 156.
5. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Res. Log. Quart. 1959. Vol. 6. P. 57-61.