УДК 519.876.2

РАСШИРЕННЫЕ МОДЕЛИ БОЯ

В.В. Шумов
Отделение погранологии Международной академии информатизации
Россия, 125040, Москва, Ленинградский проспект, 3/5
E-mail: v.v.shumov@yandex.ru

Ключевые слова: математическое моделирование, учет морального фактора, модели Осипова-Ланчестера, теоретико-игровая задача.

Аннотация: На основе анализа взглядов военных теоретиков на закономерности вооруженной борьбы получены расширения моделей боя, учитывающие моральные характеристики участников конфликта – проценты выдерживаемых ими кровавых потерь (ранеными и убитыми). Расширение модели Осипова-Ланчестера позволяет прогнозировать ход и исход боя не только на начальном этапе, но и на более поздних стадиях. При малом числе участников конфликта предложено использовать вероятностную модель боя. С ее использованием решена теоретико-игровая задача распределения ресурсов по объектам охраны.

1. Введение

Систематическим изучением проблем подготовки и ведения военных и боевых действий занимается военная наука, под которой понимается «система знаний о стратегическом характере и закономерностях войны, строительстве и подготовке вооруженных сил и страны к войне и способах ведения вооруженной борьбы» [1, с. 90]. Одной из первых математических моделей боя является модель М.П. Осипова [2]. В годы второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [3].

Если математическая теория принятия решений не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами [4], то в военной науке моральным, психологическим характеристикам уделяется важнейшее внимание. К. фон Клаузевиц отмечал, что война есть акт насилия, имеющий целью заставить противника выполнить нашу волю. Моральные величины на войне («таланты полководца, воинская доблесть армии, дух народа, комплектующего ее») занимают самое важное место [5]. Российский военный социолог Н.Н. Головин характеризовал всякий бой как чисто психологический акт, кончающийся отказом от него одной из сражающихся сторон [6]. В 1938 г. Н.Н. Головиным введен термин «моральная упругость войск» и обоснована его количественная характеристика – процент «кровавых» потерь (потери раненными и убитыми), при котором войско все еще не утрачивает боеспособность (моральный дух): «… можно установить, что для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей, моральной упругости войск, после которого они не способны уже к победе, являются кровавые потери в 25%. … Так, например большинство сражений в которых русские дрались против равноценного врага, являются очень для них кровопролитными: Цорндорф – 43%, Кунерсдорф – 43%, Аустерлиц – 15%, (Прейсиш) Эйлау – 28%, Фридланд – 24%, Бородино – 31%, Варшава – 18%, Инкерман – 24%, Первая Плевна –

28%, Вторая Плевна – 28%, Третья Плевна – 17%, и т. д. Напротив, везде, где дерутся итальянцы, мы всегда встречаем небольшие потери. Они проиграли сражение у Санта Лючия, потеряв 2%, у Кустоццы 1,2%, у Мортары 2,2%, у Новарры 5%... Можно найти некоторое объяснение этому явлению в особенностях театра военных действий, однако, видеть в этом последнем исчерпывающее объяснение – нельзя» [7].

Целью настоящей работы является расширение классических моделей боя, позволяющих учесть моральные характеристики участников конфликта.

2. Модели боя на основе динамики средних

Одним из возможных способов (и исторически первым) описания процесса боевых действий многочисленных группировок является метод динамики средних. Пусть имеются две стороны, участвующие в боевых действиях. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность войск первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$, численности в нулевой момент времени – x_0 и y_0 соответственно. Исключив из рассмотрения операционные потери (пропорциональные численности своих войск) и ввод (вывод) резервов, получим следующую систему дифференциальных уравнений (модель боя с переносом огня М. Осипова, 1915 [2]):

(1) $$\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t),\ \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t),$$

где a_x и a_y – коэффициенты эффективной скорострельности боевых единиц первой и второй стороны.

Обозначим $0 < \lambda_x < 1$ ($0 < \lambda_y < 1$) показатель боевого духа первой (второй) стороны (проценты выдерживаемых ими «кровавых потерь»). Пусть $u(t)$ и $v(t)$ есть доли пораженных бойцов первой и второй стороны в момент времени t:

(2) $$u(t) = \frac{x_0 - x(t)}{x_0},\ v(t) = \frac{y_0 - y(t)}{y_0}.$$

Участники боя делятся на три группы: 1) убитые и раненные в бою; 2) уклоняющиеся от ведения боя; 3) активно участвующие в бою. Полагая, что реакция бойцов на «кровавые потери» подчиняется основному закону психофизики в форме С. Стивенса [8], запишем вероятности отказа бойцов первой и второй стороны от ведения боя:

(3) $$\pi_x(u(t)) = u(t)^A,\ \pi_y(v(t)) = v(t)^B$$

или (по определению медианы)

(4) $$0{,}5 = (\lambda_x)^A,\ 0{,}5 = (\lambda_y)^B$$

(медианная схема оценки процентов выдерживаемых потерь выбрана в силу ее неманипулируемости).

С точки зрения психофизики $u(t)$ и $v(t)$ являются стимулами, $\pi_x(u(t))$ и $\pi_y(v(t))$ – реакцией бойцов на кровавые потери, A и B – параметрами модальности.

Из выражения (4) находим:

(5) $$A = \ln(0{,}5)/\ln(\lambda_x),\ B = \ln(0{,}5)/\ln(\lambda_y).$$

По Н. Головину значения показателя моральной устойчивости войск меняются в пределах от 2–3 % до 50–60 %. Им соответствуют значения параметра модальности $A_1 = 0{,}18–0{,}2$ и $A_2 = 1–1{,}36$. При $\lambda_x = 0{,}5$ наблюдается линейная зависимость между стимулом (процентом кровавых потерь) и реакцией на него (активное участие в бою). При малых значениях λ_x прирост реакции бойцов существенно опережает прирост наблюдаемых ими потерь.

С учетом морального фактора вероятность активного участия бойцов $P_x(t)$ первой ($P_y(t)$ – второй) стороны в бою в момент времени t равна:

(6) $$P_x(t) = 1 - u(t)^A,\ P_y(t) = 1 - v(t)^B.$$

Запишем систему уравнений динамики высокоорганизованного конфликта (модель боя с переносом огня), учитывающих психологические качества бойцов:

(7) $$\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t) P_y(t),\ \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t) P_x(t)$$

или

(8) $$\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t)\left(1 - \left(\frac{y_0 - y(t)}{y_0}\right)^B\right),\ \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t)\left(1 - \left(\frac{x_0 - x(t)}{x_0}\right)^A\right).$$

Таким образом, нами получены уточненные уравнения модели М. Осипова, позволяющие учесть в бою морально-волевые качества индивидов.

3. Расширение вероятностной модели боя

Для борьбы с небольшими боевыми группами противника (террористические группы, банды и другие формирования с числом боевых единиц до 500) метод динамики средних (и основанные на нем модели Осипова–Ланчестера) дает существенные погрешности. Поэтому он должен быть дополнен другими методами и моделями.

Используя классическое определение вероятности и учитывая показатели λ_x и λ_y, характеризующие моральный дух войска, определим вероятность победы игрока A (первого участника боя) в виде:

(9) $$p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_x x}{\alpha \lambda_x x + \lambda_y y} = \frac{\alpha \rho x}{\alpha \rho x + y},\ \rho = \lambda_x / \lambda_y,$$

где: x – количество боевых средств в распоряжении первого игрока; y – количество боевых средств в распоряжении второго игрока; α – параметр технологического превосходства первой стороны; ρ – параметр ее морального превосходства.

Исходя из определения боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск [1]) и его принципов параметр боевого превосходства стороны A вычислим с использованием определения среднего геометрического (относительных величин):

(10) $$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4},\ \alpha_j > 0, j = 1, \ldots, 4,$$

где: α_1 – коэффициент превосходства первой стороны во всестороннем обеспечении и опыте командования; α_2 – коэффициент ее превосходства в средствах разведки, навигации и связи; α_3 – коэффициент ее превосходства в маневренности; α_4 – коэффициент ее превосходства в огневых возможностях.

Коэффициент α_1 отражает опыт и мастерство командиров по подготовке к бою разнородных подразделений (групп), обеспечению непрерывного боевого и других видов обеспечения. Использование среднего геометрического дает пессимистическую оценку параметра α (среднее геометрическое не больше среднего арифметического, неравенство Коши). Так как коэффициенты $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, 4$ являются относительными величинами, то для определения среднего следует использовать среднее геометрическое.

Преобразуем выражение (9) к виду:

(11) $$p_x = \frac{\alpha \rho x}{\alpha \rho x + y} = \frac{\beta x}{\beta x + y},$$

где β – параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй.

Для оценки параметра β воспользуемся функцией правдоподобия L:

(12) $$L = \prod_{i=1}^{m} (p_i)^s (1-p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s},$$

где: m – количество наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки); p_i – вероятность победы первой стороны в i-м бою (неизвестная величина); s – доля боев, в которых победила первая сторона; $x_i > 0$ – количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в i-м бою; $y_i > 0$ – количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в i-м бою.

Оценивание параметра можно выполнить максимизацией логарифмической функции правдоподобия:

(13) $$l = \ln L = \sum_{i=1}^{m} \left\{ s \ln \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right) + (1-s) \ln \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right) \right\}.$$

Искомое значение параметра β находится численным методом из уравнения:

(14) $$\frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0.$$

4. Теоретико-игровая задача распределения ресурса по объектам охраны

Задача распределения ограниченных ресурсов обороны и нападения (игра полковника Блотто) известна в нашей стране с 1961 г. [9]. Рассмотрим постановку теоретико-игровой задачи распределения ресурса по объектам охраны с использованием расширенной вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество объектов охраны, через $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – действие первого игрока (охраны), через $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ – действие второго игрока (нападающих), где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на объект i. На ресурсы наложены ограничения:

(15) $$\sum_{i \in N} x_i \leq R_x, \ \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$$

Заданы целевые функции сторон (охраны и нападающего):

(16) $$F_x(x, y) = \sum_{i \in N} V_i p_i(x_i, y_i) = \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \to \max,$$

(17) $$F_y(x, y) = \sum_{i \in N} V_i (1 - p_i(x_i, y_i)) = \sum_{i \in N} V_i \frac{y_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} \to \max,$$

где: $\rho > 0$ – отношение моральных потенциалов сторон; $\alpha_i > 0$ – параметр технологического превосходства первой стороны (охраны) на объекте i. Вероятность $p_i(x_i, y_i)$ победы первого игрока на объекте i является расширением вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

Положим, что ожидаемые продолжительности тактических циклов действий сторон (охраны и нападения) примерно одинаковы. Тогда есть основания считать, что решения сторонами (игроками) принимаются одновременно и независимо.

Используя функции Лагранжа, находим оптимальное распределение ресурса по объектам охраны:

$$x_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_x}{S(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},\ y_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_y}{S(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},\ i \in N,\ S = \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2}, \tag{18}$$

и оптимальные выигрыши сторон:

$$F_x(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho R_x}{\alpha_i \rho R_x + R_y},\ F_y(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{R_y}{\alpha_i \rho R_x + R_y}. \tag{19}$$

Оптимальное распределение ресурса охраны и нападающих по объектам зависит от имеющихся суммарных ресурсов сторон, ценностей объектов охраны, соотношения моральных потенциалов сторон и значений параметра превосходства на объектах.

5. Заключение

Таким образом, рассмотрены расширения двух моделей боя, учитывающие морально-психологические характеристики его участников и отражающие взгляды военных теоретиков и практиков. Первая модель является расширением уравнений Осипова–Ланчестера и позволяет прогнозировать ход и исход боя не только на начальном этапе, но и на более поздних стадиях. Вторая, вероятностная модель применяется при малом количестве участников боя и учитывает моральные характеристики бойцов и технологические характеристики оружия. Имея модели динамики боя, пограничного конфликта, можно ставить и решать задачи управления и противоборства.

С использованием вероятностной модели решена теоретико-игровая распределения ресурсов по объектам охраны.

Список литературы

1. Война и мир в терминах и определениях: военно-политический словарь / Под общ. ред. Д. Рогозина. М.: ПоРог, 2004. 334 с.
2. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. 1915. № 6. С. 59-74; № 7. С. 25-36; № 8. С. 31-40; № 9. С. 25-37.
3. Morse P.M., Kimball G.E. Methods of Operations Research. Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. 158 p.
4. Оуэн Г. Теория игр / Пер. с англ. под ред. А. А. Корбута со вступ. статьей Н. Н. Воробьева. М.: Мир, 1971. 230 с.
5. Клаузевиц К. О войне. М.: Госвоениздат, 1934.
6. Головин Н.Н. Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца. Книга 2. Статьи и письма. М.: ВАГШ, 1995. 303 с.
7. Головин Н.Н. Наука о войне. О социологическом изучении войны. Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. 242 с.
8. Stevens S.S. On the psychophysical law // Psychol Rev. 1957.No. 64 (3). P. 153-181.
9. Применение теории игр в военном деле / Сборник переводов. М.: Советское радио, 1961. 360 с.