УДК 621.391.82; 621.3.019.34

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ВЫБОРКИ ПОВЫШЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ К ПОГРЕШНОСТЯМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Ю.В. Максимов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: jhanjaa@ipu.ru

Д.Ю. Максимов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: dmmax@inbox.ru

Ключевые слова: экстраполяция выборки, фильтрация выборки, аппроксимация выборки, погрешности дискретизации, восстановление функции, цифровая обработка.

Аннотация: Рассматривается проблема экстраполяции ограниченной выборки дискретных значений некоторой функции при наличии погрешностей дискретизации. Предлагается метод экстраполяции, использующий предварительную обработку выборки с целью фильтрации погрешностей дискретизации.

1. Введение

Проблема экстраполяции ограниченной выборки дискретных значений некоторой функции за пределы области ее задания возникает, например, в задачах прогнозирования или при восстановлении дискретизированной функции (в возможно более широкой области) по заданной выборке [1]. При ограниченной выборке дискретных значений функции ее однозначное восстановление (по крайней мере, за пределами области дискретизации) невозможно. В этом случае возможна лишь аппроксимация заданной функции некоторыми другими с использованием различных критериев оценки отклонений аппроксимирующей функции от исследуемой. Наибольшее распространение получил критерий среднеквадратического отклонения аппроксимирующей функции от оригинала в исследуемой области. При этом наименьшее значение среднеквадратического отклонения обеспечивается при аппроксимации заданной функции (представленной некоторой конечной выборкой ее дискретных значений) функцией с ортогональным базисом, например, конечным рядом Котельникова. Однако в данном случае речь идет лишь о приближении аппроксимирующей функции к оригиналу только в заданной области дискретизации. Расширить эту область можно путем экстраполяции выборки.

Под влиянием погрешностей дискретизации полученная выборка отсчетов будет соответствовать искаженной непрерывной функции, имеющей, как правило, более широкий, если не бесконечный, спектр. Что, по ряду причин, может значительно усилить искажения при экстраполяции выборки. Снижение искажений достигается путем специальной фильтрации выборки дискретных отсчетов перед экстраполяцией выборки. В рассматриваемом случае (как показывает моделирование) при фильтрации с последующей экстраполяцией крайне важно сохранить форму функции, особенно при небольших размерах выборки. В данной работе и предлагается решение задачи по разработке такого метода фильтрации конечной выборки и метода ее экстраполяции, устойчивой к погрешностям дискретизации.

2. Основные идеи предлагаемых решений

2.1. Метод фильтрации выборки

Суть предлагаемого метода фильтрации заключается в замене заданной выборки выборкой меньшего размера с сохранением размера области задания функции (выборки). Это эквивалентно снижению частоты дискретизации и, соответственно, уменьшению верхней частоты спектра функции, аппроксимирующей заданную. Предлагаемая замена выборки осуществляется путем интерполяции значений заданной выборки в точки расположения новой (эквивалентной) выборки. Рис. 1 иллюстрирует взаимное расположение выборок и нулевых составляющих соответствующих аппроксимирующих рядов.

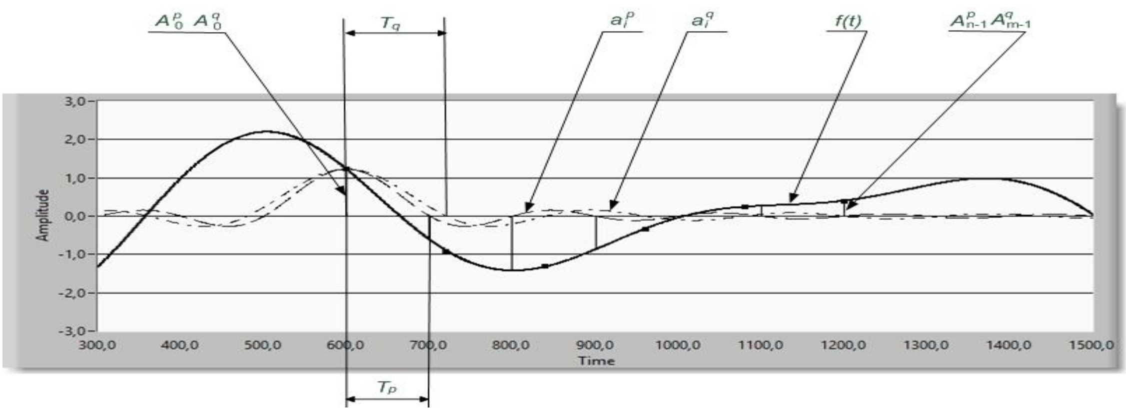

Рис. 1. Исходная и эквивалентная (полученная интерполяцией) выборки.

На рис. 1 значения заданной выборки представлены пересечениями вертикальных линий с дискретизируемой функцией, а значения эквивалентной выборки, вычисленные при интерполяции, представлены точками. На рис. 1 введены следующие обозначения: $f(t)$ – дискретизируемая функция; p и q – индексы, относящиеся к элементам и значениям заданной (исходной) и эквивалентной выборок соответственно; T_p и T_q – интервалы дискретизации заданной и эквивалентной выборок соответственно; A_l^p и A_l^q - значения соответствующих выборок (p и q) в точках l и k соответственно (на рисунке обозначены начальные ($k = l = 0$) и конечные ($l = n-1$ и $k = m-1$) составляющие выборок размером n и m соответственно); a_l^p и a_k^q – текущие значения составляющих l и k аппроксимирующих функций соответственно заданной и эквивалентной выборок (на рис. 1 показаны составляющие соответствующие начальным значениям выборок).

При аппроксимации заданной выборки конечным рядом Котельникова, соответствующим интервалу дискретизации T_p , $a^p(t)$ имеет вид:

$$a^p(t) = \sum_{l=0}^{n-1} A_l^p \times \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T_p} \times \left(t - l \times T_p\right)\right)}{\dfrac{\pi}{T_p} \times \left(t - l \times T_p\right)}$$

Аналогично для эквивалентной выборки:

$$a^q(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k^q \times \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T_q} \times \left(t - k \times T_q\right)\right)}{\dfrac{\pi}{T_q} \times \left(t - k \times T_q\right)}$$

Спектральная плотность аппроксимирующей функции заданной выборки имеет вид [2]:

$$S^p(\omega) = \sum_{l=0}^{n-1} S_l^p \times e^{-j\omega t_l^p},$$

где

$$S_l^p = A_l^p \times T_p,\ t_l^p = l \times T_p,\ -\omega_h^p \le \omega \le \omega_h^p \text{ и } \omega_h^p = \frac{\pi}{T_p}.$$

Аналогично спектральная плотность аппроксимирующей функции эквивалентной выборки имеет вид:

$$S^q(\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} S_k^q \times e^{-j\omega t_k^q}, \text{ где } S_k^q = A_k^q \times T_q,\ t_k^q = k \times T_q,\ -\omega_h^q \le \omega \le \omega_h^q \text{ и } \omega_h^q = \frac{\pi}{T_q}.$$

Таким образом, действительно ширина спектра аппроксимирующей функции, определяемая его верхней частотой ω_h, обратно пропорциональна интервалу дискретизации, что и объясняет фильтрующие свойства такой процедуры интерполяции, при которой заданная выборка заменяется эквивалентной с увеличенным интервалом дискретизации. Наилучшие результаты интерполяции обеспечивает способ, основанный на использовании «окна», формируемого специальной выделяющей функцией с ограниченным спектром [1], применимый в тех случаях, когда спектр дискретизируемых функций ограничен частотами, составляющими некоторую долю (k_h) от частоты Найквиста ($\omega < k_h \times \omega_h$). Величина этой доли определяется в основном размером выборки, и при малых выборках стремится к 1/2. Используемая выделяющая функция $f(d)$ имеет вид:

$$f(d) = b_k \times \frac{\sin(\pi \times (d-k))}{\pi \times (d-k)},$$

где b_k – коэффициенты взвешивания составляющих выделяющей функции, $d = \dfrac{t}{T_d}$ – безразмерное время, T_d – интервал дискретизации.

В рамках данного исследования в среде LabView разработана программа формирования функции «окна» (вычисления коэффициентов b_k), имеющей минимальную ширину основного лепестка спектра выделяющей функции для заданной степени подавления за его пределами. При этом обеспечивается минимальное требуемое увеличение частоты дискретизации, при котором сохраняется частотный диапазон дискретизируемых функций. На рис. 2 сплошной линией представлена форма спектра выделяющей функции для выборки размером 15 при степени подавления составляющих спектра вне основного лепестка спектра равной 40 (значение выбрано для наглядности демонстрации равно пульсирующего характера спектра в полосе подавления).

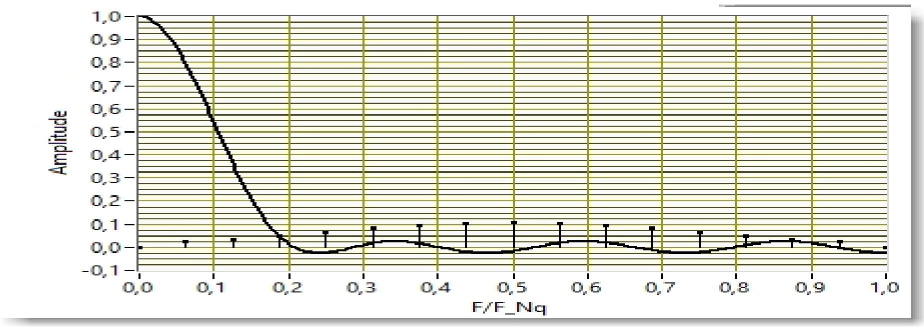

Рис. 2. Амплитудный спектр выделяющей функции.

На этом же рис. точками показаны значения коэффициентов b_k. Качество фильтрации в конечном итоге может быть оценено устойчивостью экстраполяции дискретных значений заданной выборки к погрешностям дискретизации.

2.2. Метод экстраполяции выборки

Метод заключается в решении задачи, обратной интерполяции. Искомая выборка, область определения которой расширена по сравнению с заданной, находится по значениям функции, аппроксимирующей искомую выборку, в точках заданной выборки путем интерполяции. В качестве аппроксимирующей функции искомой выборки выбирается расширенный ряд вида: $\sum_{k=0}^{M-1} A_k \times \frac{\sin(x)}{x}$. Составляющие ряда сдвинуты относительно отсчетов эквивалентной выборки, полученной из заданной (размером n) путем интерполяции, (здесь M – размер расширенного ряда). Частоты составляющих расширенного ряда отличаются от частот составляющих ряда Котельникова, аппроксимирующего заданную выборку (как это было и в рассмотренной процедуре интерполяции). Затем к выбранному аппроксимирующему ряду применяется процедура интерполяции в точках эквивалентной выборки, расширенной за пределы области ее определения. Значения составляющих выбранного ряда находятся из условий минимизации среднеквадратического отклонения аппроксимирующей функции в точках эквивалентной выборки от значений этой выборки в области ее определения. При этом соответствующая система уравнений для составляющих ряда образуется для $0 \le q < m + m_q$, где m_q – расширение эквивалентной выборки:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left\{ a(q,l) \times \sum_{k=0}^{m-1+m_q} \left[A_k^q \times a(k,l) \right] \right\} = \sum_{l=0}^{n-1} \left[A_l^p \times a(q,l) \right],$$

где

$$a(r,l) = \frac{\sin[(r+d-l) \times \pi \times k_d]}{(r+d-l) \times \pi \times k_d},$$

$r = q$ или $r = k$ соответственно для $a(q,l)$ и $a(k,l)$, d – сдвиг составляющих аппроксимирующего ряда (в долях интервала дискретизации T_d), $k_d = \frac{T_d}{T_q}$ – коэффициент изменения частоты составляющих аппроксимирующего ряда относительно частоты дискретизации.

Коэффициент k_d вычисляется при моделировании процедуры экстраполяции эквивалентной функции, включая и операцию последующей интерполяции аппроксимирующего ряда в точки заданной выборки. Рис. 3 иллюстрирует предложенный подход при отсутствии погрешностей дискретизации.

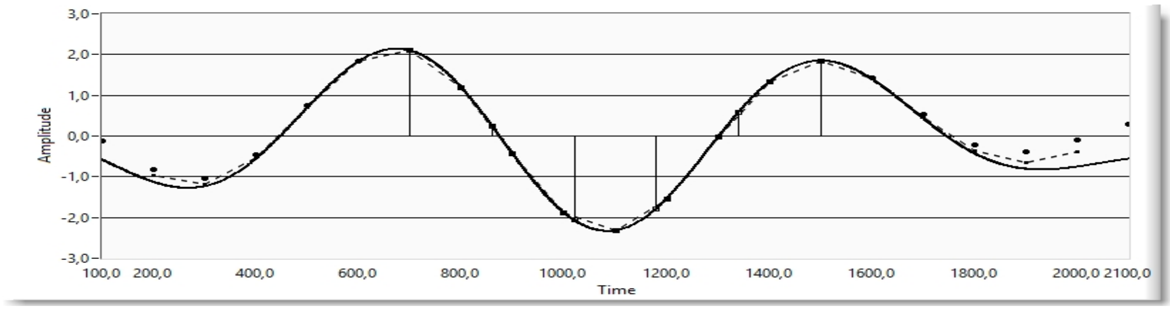

Рис. 3. Экстраполяция при отсутствии погрешностей дискретизации.

На рис. 3 сплошной линией показана дискретизируемая функция, в точках пересечения которой вертикальными линиями лежат отсчеты эквивалентной выборки, полученной интерполяцией из заданной. Ломаная пунктирная линия соединяет точки выборки, расширенной (экстраполированной) относительно заданной, в отсутствии процедуры фильтрации. Круглыми точками показаны значения расширенной выборки, вычисленные с учетом фильтрации.

На рис. 3а показаны те же расчетные значения для некоторого случайного распределения ошибок дискретизации с максимальной величиной 2%.

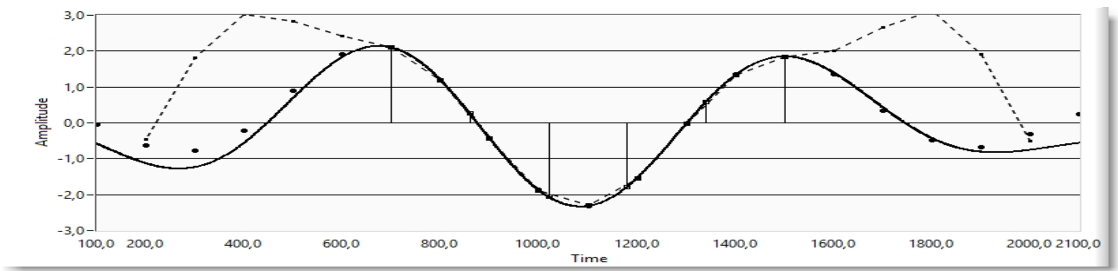

Рис. 3а. Экстраполяция при случайном распределении погрешностей дискретизации.

Рисунки наглядно демонстрируют, что если в отсутствии фильтрации расчетные значения расширенной выборки в области экстраполяции существенно (и непредсказуемо) могут изменяться при наличии ошибок дискретизации, то при наличии фильтрации расчетные значения изменяются незначительно.

3. Заключение

Рассмотренные проблемы, связанные с экстраполяцией выборок ограниченного размера в условиях погрешностей дискретизации, и предложенные подходы к решению этих проблем позволили разработать методы фильтрации и экстраполяции выборки конечного (в том числе малого) размера, обеспечивающие повышенную помехоустойчивость экстраполяции (при минимальном повышении частоты дискретизации).

Разработана программа расчета функции «окна» с ограниченным спектром (с минимизацией ширины основного лепестка спектра).

Список литературы

1. Рождественский Д.Б. Методы экстраполяции на основе алгоритма восстановления непрерывного процесса по конечному числу равноотстоящих отсчетов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 183-189.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2003. 462 с.