УДК 519.218.84+531.19+534+539.538+681.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ ВИБРАЦИИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Е.А. Правоторова
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4
E-mail: pravotorova@bk.ru

О.Б. Скворцов
НТЦ «Завод Балансировочных Машин»; Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Россия, 101990, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4
E-mail: skv@balansmash.ru

Ключевые слова: эргодический процесс, вибрация, испытания, прочность, надежность, погрешности.

Аннотация. Рассмотрена возможность применения эргодической теоремы при оценке надежности механического оборудования в условиях развития повреждений из-за воздействия вибрации. Получены оценки точности измерений случайных процессов, описывающих такие явления. Предложены методики проведения экспериментов на ограниченных по количеству объектов с увеличением длительности испытаний.

1. Введение

В промышленном оборудовании рассмотрим возбуждение ударных колебательных процессов в элементах электротехнического оборудования в условиях воздействия импульсных токов [1-4] в качестве примера механических процессов. Параметрами таких ударных воздействий можно управлять изменением характеристик импульса тока. Контролировать механические воздействия при этом можно по сигналам вибрации от датчика, установленного на испытываемом элементе.

Вибрационные сигналы могут рассматриваться как случайные эргодические [5, 6] при выполнении различных физических измерений [7]. Для таких измерениях необходимо оценить точность параметров различных эргодических процессов [8].

2. Методы анализа процессов

Вибрационный сигнал, соответствующий критериям эргодичности, например, узкополосный случайный сигнал, можно представить в виде:

$$x(t_i) = A(t_i)\sin\left(2\pi \frac{f(t_i)}{fk} i + \varphi(t_i)\right) + n_i ,$$

где $A(t_i)$, $f(t_i)$, $\varphi(t_i)$ и n_i случайные значения амплитуды, частоты, фазы и аддитивного шума. Амплитуда, частота имеют распределение, близкое к распределению Релея, а фаза – угловому нормальному распределению.

Формировать оценки случайной амплитуды подобного процесса [9] можно, используя алгоритм дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Для последовательности реализаций, каждая из которых имеет длительность *1/Mf*, где *Mf* – среднее значение случайной частоты вибрационного процесса, формируют оценки амплитуды (среднего значения и дисперсии). Оценки среднего значения амплитуды для 64 последовательных реализаций, каждая которых состоит их 64 выборок узкополосного случайного сигнала показаны на рис. 1. Аддитивный шум с нормальным распределением в сигнале задан имеющим отношении сигнал/шум (*SNR*), равным единице. Зависимость случайной амплитуды от времени приведена на рисунке в виде линии.

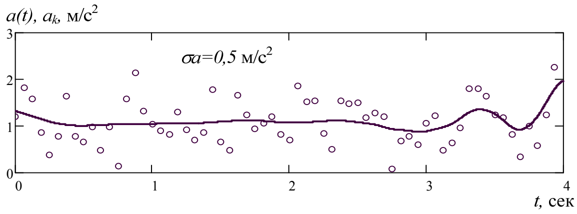

Рис. 1. Зависимость изменения случайной амплитуды узкополосного случайного процесса и выборочных оценок амплитуды, полученных с использованием ДПФ. Ma=1 м/с^2, σa=0,5 м/с^2, Mf=10 Гц, σf=3 Гц, $M\varphi$=0, σφ=5°, σn=0,718 (*SNR*=1).

При анализе вибрационного состояния элемента временные сигналы представляются дискретными временными рядами, для которых выполняют определение экстремальных или средних оценок. В общем случае средние и экстремальные характеристиками процессов могут соответствовать критериям эргодичности.

Рассмотрение зависимостей оценок размаха и среднеквадратичных значений (СКЗ), а также пик-фактора от длительности импульса тока при постоянной амплитуде тока показывает, что такие зависимости могут быть как близкими к линейным, так и нелинейными в зависимости от выбираемого параметра (размаха или СКЗ). Аналогичные зависимости получены и виде функции от величины тока через испытываемый элемент, контролируемого датчиком Холла. При исследовании таких эргодических процессов как вибрационный отклик металла на пропускание электрического импульса использование оценки по размаху контролируемой величины обеспечивает снижение погрешностей измерения. Уменьшение для эргодических процессов значений автокорреляционной функции до значений, стремящихся к нулю, позволяет реализовать «повторные» испытаний для единственного образца, в соответствии с теоремой Биркгофа — Хинчина [10].

При испытании на действие вибрационных процессов с воздействием импульсных токов методами эргодической теории их анализ производится в следующей последовательности.

Оценка стационарности процессов. Процесс для которого математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция $K(t_1, t_2)$ зависит только от разности $\tau=t_1-t_2$ [11] называется стационарным в широком смысле.

Оценка эргодичности процессов. Стационарная случайная функция имеет эргодические свойства, если ее характеристики (математическое ожидание – m_x, дисперсия - D_x и корреляционная функция – $K_x(\tau)$), рассчитанные для совокупности реализаций, равны средним по времени для одной реализации той или иной продолжительности T.

Длительность реализации определяется заданной точностью результатов измерения.

Для достаточно большого T математическое ожидание стационарного эргодического процесса:

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt ,$$

его дисперсия:

$$D_x = \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t) - m_x\right]^2 dt ,$$

а корреляционная функция:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \left[x(\tau) - m_x\right]\left[x(t+\tau) - m_x\right] dt .$$

Состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое значений n:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x(t_i)}{n} . \tag{1}$$

Обладающей указанными свойствами оценкой дисперсии D_x является величина:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[x(t_i) - m_x\right]^2}{n-1} .$$

Также можно вычислить корреляционную функцию:

$$K_x\left(\frac{pT}{m}\right) = \frac{1}{m-p}\sum_{i=1}^{m_p} x(t_i - m_x)\cdot x(t_{m_p} - m_x) ,$$

где m – количество точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$; p – меняющееся значение параметра (p=1,…,m).

Для рассматриваемой реализации эргодического процесса, количество точек, определяющее его продолжительность, находится аналогично вычислению количества реализаций случайного процесса в зависимости от заданной точности получаемых результатов. Примеры оценок для узкополосного эргодического случайного вибрационного процесса приведены на рис. 2.

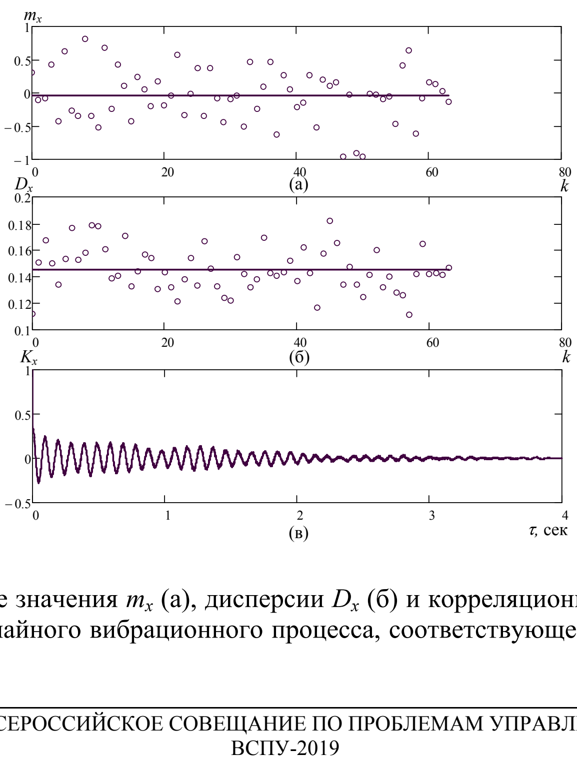

Рис. 2. Выборочные значения m_x (а), дисперсии D_x (б) и корреляционной функции K_x (в) узкополосного случайного вибрационного процесса, соответствующего критериям эргодичности.

Оценим количество точек, необходимых для оценки среднего значения, определяемого по формуле (1). В силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях n среднее арифметическое будет иметь распределение близкое к нормальному, с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2/n. Поэтому получаем:

$$P\left(\frac{m_x - Mm_x}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$ – функция Лапласа, ε – точность неравенства.

Для определенной вероятности P можно найти из таблиц нормального распределения t_P, удовлетворяющее уравнению $\Phi(t)=P$, где

$$t_P = \frac{\varepsilon}{D - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Отсюда доверительная оценка m_x примет вид:

$$P\left(\left|m_x - Mm_x\right| < \varepsilon\right) = t_P\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда точность:

(2) $$\varepsilon = t_P\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Решая (2) относительно n получаем:

(3) $$n = \frac{t_p^2\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

При P=0,997 соотношения (2) и (3) примут вид:

$$\varepsilon = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}},\ n = \frac{9\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Полученные зависимости представлены в виде трехмерного графика на рис. 3.

Кроме того, может быть построен доверительный интервал для дисперсии и корреляционной функции и таким образом можно оценить необходимую продолжительность реализации.

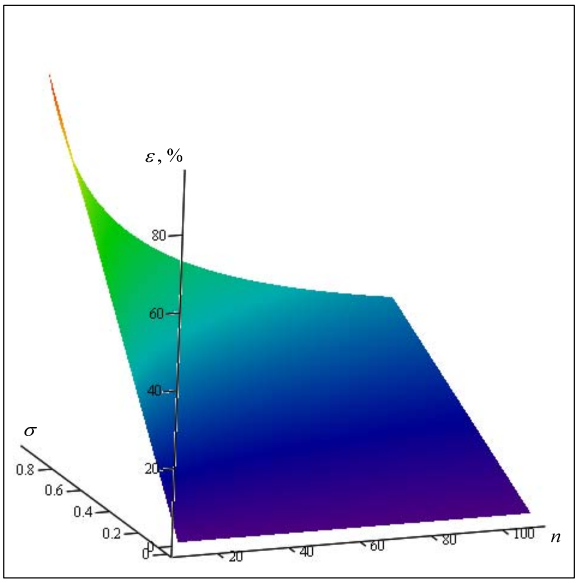

Рис. 3. Зависимость относительной погрешности от числа выборочных оценок и среднего квадратичного отклонения.

Удовлетворительная точность оценок может быть получена для эргодических процессов на относительно коротких реализациях для случая вибрационных сигналов, близких к наблюдаемым в элементах мощного электротехнического оборудования в условиях эксплуатации и определяющих параметры механических повреждений.

Список литературы

1. Правоторова Е.А., Скворцов О.Б. Оценка статистических характеристик механического действия импульсного тока на модели элементов мощного электрооборудования // Динамика и прочность конструкций аэрогидроупругих систем. Численные методы. Третья научно-техническая конференция, 21-23 октября 2015 г. М.: ИМАШ РАН, 2015. С. 39-40.
2. Правоторова Е.А., Скворцов О.Б. Статистические оценки вибрационных сигналов // Международная конференция «Живучесть и конструкционное материаловедение». М.: ИМАШ РАН, 2016. С. 141-144.
3. Троицкий О.А., Скворцов О.Б., Правоторова Е.А. Оценка однократных вибрационных реакций проводников на действие импульса тока // Колебания и волны в механических системах. Материалы международной научной конференции. Под ред. Р.Ф. Ганиева. М.: ИМАШ РАН, 2017. С. 133-135.
4. Troickij O.A., Skvorcov O.B., Pravotorova E.A., Stashenko V.I. Analysis of the Relationships for the Vibrational Response to the Excitation of Vibro-Acoustic Processes in Conductors from the Action of a Pulsed Current // International School-Conference "New materials – Materials of innovative energy: development, characterization methods and application''. KnE Materials Science. 2018. P. 611-620.
5. Pravotorova E.A. Skvortsov O.B. Modelling of vibration tests of winding elements of power electric equipment // Journal of machinery manufacture and reliability. 2015. Vol. 44. No. 5. P. 479-484.
6. Прикладной анализ случайных процессов / Под ред. Прохорова С.А. М.: СНЦ РАН, 2007. 582 с.
7. Зеленов Г.Я. Применение эргодической гипотезы для измерения параметров и обработки результатов измерений в инфракрасной (ИК) области спектра // Современная электроника. 2009. № 2. С. 70-75.
8. Заико Н.А. Дискретная модель измерения эргодических случайных процессов // Вестник УГАТУ Управление. ВТиИ, 2008. Т. 10, № 2 (27). С. 172-176.
9. Скворцов О.Б. Анализ вибрационных сигналов при решении задач балансировки роторов // Автоматизация. Современные технологии. 2018. № 2. С. 60–66.
10. Гнеденко Б.В, Курс теории вероятности / 8-е издание. М.: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.
11. Проблемы машиноведения: точность, трение и износ, надежность, перспективные технологии // СПб.: Наука, 2005. 740 с.