УДК 004.7:519.872

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОРЯДКОМ ОПРОСА ОЧЕРЕДЕЙ В СИСТЕМАХ ПОЛЛИНГА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ШИРОКОПОЛОСНЫХ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ

О.В. Семёнова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: olgasmnv@gmail.com

З.Т. Буй
Московский физико-технический институт
Россия, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
E-mail: duytan@phystech.edu

Ключевые слова: система поллинга, циклический адаптивный опрос, исчерпывающее обслуживание, метод производящих функций.

Аннотация: В работе рассматривается адаптивное управление порядком опроса в системе поллинга с исчерпывающией дисциплиной обслуживания очереди. Сервер циклически опрашивает очереди и при этом пропускает (не посещает) те из них, которые были пусты в момент их опроса в предыдущем цикле. Рассмотрены состояния системы в моменты опроса очередей, и методом производящих функций получена система уравнений для первых моментов стационарного распределения длин очередей, что позволяет получить среднее время ожидания в очередях.

1. Введение

Системы поллинга представляют собой системы массового обслуживания с произвольным числом очередей и общим обслуживающим устройством (сервером). В каждый момент времени к серверу имеет доступ как правило лишь одна очередь, которая выбирается в соответствии с правилом (порядком опроса), которое может быть задано заранее либо быть управляемым в процессе функциоирования системы. Подробный обзор работ, посвященных классификации и анализу систем поллинга, можно найти в [1–3]. Особого внимания заслуживают системы поллинга с циклическим адаптивным порядком опроса очередей, при котором сервер циклически опрашивает очереди и при этом пропускает (не посещает) те из них, которые были пусты в момент их опроса в предыдущем цикле [4, 5]. Такой порядок опроса предполагается для систем, в которых информация о состоянии очередей (числе заявок в них) доступна лишь в момент, когда очередь получает доступ к серверу. Модели таких систем находят применение в широкополосных беспроводных сетях IEEE 802.11 с централизованным управлением [1, 6]. В данной работе предложен анализ системы поллинга с циклическим адаптивным опросом и исчерпывающей дисциплиной обслуживания очередей, при которой непустая очередь, получившая доступ к серверу, будет обслуживаться до тех пор, пока она не опустеет. Пустая же очередь доступа к серверу в следующем цикле опроса не получает и получит возможность обслужить заявки лишь два цикла спустя. Однако предполагаем, что если все подряд очереди системы (начиная с произвольной очереди), получив доступ к серверу, оказываются пусты, то сервер начинает простаивать случайное время, по истечении которого процедура опроса очередей возобновляется.

2. Анализ системы методом производящих функций

Рассмотрим систему поллинга с N очередями типа $M/G/1$ и исчерпывающим обслуживанием очередей. В i-ю очередь (обозначим ее через Q_i) поступает простейший поток заявок с параметром λ_i. Время обслуживания заявки в этой очереди имеет функцию распределения $B_i(t)$ с первым и вторым начальными моментами b_i и $b_i^{(2)}$, а также преобразование Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) $\tilde{B}_i(s)$. Время подключения сервера к очереди Q_i имеет функцию распределения $S_i(t)$ с первым и вторым моментами s_i и $s_i^{(2)}$ и ПЛС $\tilde{S}_i(s)$. Длительность отдыха (простоя сервера), в случае, если подряд очереди оказываются пусты, имеет функцию распределения $H(t)$ с первым и вторым моментами β и $\beta^{(2)}$ и ПЛС $\tilde{H}(s)$.

Условие существования стационарного режима для данной системы имеет вид $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i < 1$, где $\rho_i = \lambda_i b_i$ – загрузка очереди Q_i. Предположим, что это неравенство выполнено.

Обозначим через X_i^j число заявок в очереди Q_j в произвольный момент опроса очереди Q_i, $i, j = \overline{1, N}$, $A_i(T)$ – число заявок, поступивших в Q_i за время , $\Theta_{i,k}$ — длительность периода занятости сервера в очереди Q_i, порожденного k-й заявкой, V — длительность отдыха сервера. Величины $\Theta_{i,k}$ независимы и одинаково распределены с ПЛС функции распределения $\widetilde{\theta}_i(w)$, которое находится как решение функционального уравнения $\widetilde{\theta}_i(w) = \widetilde{B}_i(w + \lambda_i - \lambda_i \widetilde{\theta}_i(w))$.

Средняя длительность периода занятости сервера в i-й очереди определяется как $\theta_i = -\widetilde{\theta}'(0) = \frac{b_i}{1-\rho_i}$. Тогда для исчерпывающей дисциплины обслуживания величины $X_i^j, i, j = \overline{1, N}$ связаны между собой следующим образом:

$$
X_{i+1}^j \Big| M_{i+1}^{(n)} = \begin{cases} X_{i-n}^j + A_j\left(\sum_{k=1}^{X_{i-n}^{i-n}} \Theta_{i-n,k} + S_{i+1} + VI_{\{n=N\}}\right), i-n \neq j, \\ A_j\left(S_{i+1} + VI_{\{n=N\}}\right), i-n = j \end{cases} \tag{1}
$$

для всех $n = \overline{0, N}$, где $M_{i+1}^{(n)}$ – это событие, состоящее в том, что сервер пропускает ровно n очередей перед опросом очереди Q_{i+1}, т.е. предыдущая очередь, которую опрашивал сервер, была Q_{i-n}, если $i > n$, и Q_{i-n+N}, если $i \leqslant n$. При $i - n < 0$ мы предполагаем, что $X_{i-n}^j = X_{i-n+N}^j$. Здесь также $I_{\{n=N\}} = 1$, если $n = N$, и $I_{\{n=N\}} = 0$ в противном случае.

При фиксированном i, вероятности событий $M_{i+1}^{(n)}$, $n = \overline{0, N}$ вычисляются следующим образом: $\mathbf{P}\{M_{i+1}^{(0)}\} = u_i$, $\mathbf{P}\{M_{i+1}^{(n)}\} = \tau_{n,i} u_{i-n}$, $n = \overline{1, N-1}$, $\mathbf{P}\{M_{i+1}^{(N)}\} = \tau_{N,i}$, где

$\tau_{n,i} = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_{i-n})$, $u_j = u_{j+N}$, если $j \leqslant 0$, u_i – есть вероятность опроса очереди Q_i в произвольном цикле опроса (см [5]), получаемая как решение системы уравнений

$$u_i = \frac{1}{1+e^{-\lambda_i C}}, \quad i = \overline{1,N},$$
$$C = \frac{\sum_{i=1}^{N} s_i u_i + \beta \prod_{i=1}^{N}(1-u_i)}{1-\rho}.$$

С помощью соотношения (1) получаем

(2) $$F_i(\mathbf{z}) = u_i \mathbf{M}_{i+1}^{(0)}(\mathbf{z}) + \tau_{1,i} u_{i-1} \mathbf{M}_{i+1}^{(1)}(\mathbf{z}) + \ldots + \tau_{N-1,i} u_N \mathbf{M}_{i+1}^{(N-1)}(\mathbf{z}) + \tau_{N,i} \mathbf{M}_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{M}_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = \mathbf{M}\left[\prod_{j=1}^{N} z_j^{X_{i+1}^j} \middle| M_{i+1}^{(l)}\right]$, $l = \overline{0,N}$.

Производящие функции $\mathbf{M}_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z})$, $l = \overline{0,N}$ определяются равенствами [7]

(3) $$\mathbf{M}_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = F_{i-l}\left(z_1, z_2, \ldots, z_{i-l}, \widetilde{\theta}_{i-l}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right), z_{i-l+2}, \ldots, z_N\right) \times$$
$$\times \widetilde{S}_{i-l+1}\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right], \quad l = \overline{0,N-1},$$
$$\mathbf{M}_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}) = F_{i-N}\left(z_1, z_2, \ldots, z_{i-N}, \widetilde{\theta}_{i-N}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right), z_{i-N+2}, \ldots, z_N\right) \times$$
$$\times \widetilde{S}_{i-N+1}\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right] \tilde{H}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(1-z_j)\right).$$

Среднее число заявок $f_i(j) = M[X_i^j]$ в очереди Q_j в момент опроса очереди Q_i определяется как $f_i(j) = \mathbf{M}\left[X_i^j\right] = \left.\frac{\partial F_i(\mathbf{z})}{\partial z_j}\right|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}}$, где $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Дифференцируя равенства (2) с учетом (3), получаем следующую систему линейных алгебраически уравнений для $f_i(j)$, $i, j = \overline{1,N}$:

(4) $$f_{i+1}(j) = u_i\left[I_{\{i,j\}} f_i(j) + I_{\{i,j\}}\lambda_j \frac{b_i}{1-\rho_i} f_i(i) + \lambda_j c_{i+1}\right] +$$
$$+ \tau_{1,i} u_{i-1}\left[I_{\{i-1,j\}} f_{i-1}(j) + I_{\{i-1,j\}}\lambda_j \frac{b_{i-1}}{1-\rho_{i-1}} f_{i-1}(i-1) + \lambda_j c_{i+1}\right] + \ldots +$$
$$+ \tau_{N,i}\left[I_{\{i-N,j\}} f_{i-N}(j) + I_{\{i-N,j\}}\lambda_j \frac{b_{i-N}}{1-\rho_{i-N}} f_{i-N}(i-N) + \lambda_j (c_{i+1}+\beta)\right].$$

Моменты второго порядка случайных величин $X_i^j, i, j = \overline{1,N}$ вычисляются следующим образом:

$$f_i(j,k) = \mathbf{M}\left[X_i^j X_i^k\right] = \left.\frac{\partial^2 F_i(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k}\right|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}},$$
$$f_i(i,i) = \mathbf{M}\left[X_i^i(X_i^i - 1)\right] = \left.\frac{\partial^2 F_i(\mathbf{z})}{\partial z_j^2}\right|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}}.$$

Дифференцируя (4), получаем

$$f_{i+1}(j,k) = \left[u_i \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(0)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} + \tau_{1,i} u_{i-1} \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(1)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} + ... + \tau_{N,i} \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(N)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} \right] \Bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}}, \tag{5}$$

где частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(l)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k}$, $l = \overline{0,N}$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(0)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_j \lambda_k s^{(2)}_{i+1} + s_{i+1}\lambda_k f_i(j) + s_{i+1}\lambda_j f_i(k) + f_i(i,j)\frac{b_i \lambda_k}{1-\rho_i} +$$
$$+ f_i(i)\lambda_j\lambda_k \left[\frac{2b_i s_{i+1}}{1-\rho_i} + \frac{b^{(2)}_i}{(1-\rho_i)^3} \right] + f_i(i,k)\frac{b_i\lambda_j}{1-\rho_i} +$$
$$+ f_i(i,i)\lambda_j\lambda_k \left(\frac{b_i}{1-\rho_i} \right)^2 + f_i(j,k), i \neq j, i \neq k,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(0)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_i \lambda_j s^{(2)}_{i+1} + s_{i+1}\lambda_i f_i(j) + f_i(i)\lambda_i\lambda_j \frac{s_{i+1} b_i}{1-\rho_i}, i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(0)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_i^2 s^{(2)}_{i+1}, i,j,k = \overline{1,N},$$
$$...$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(N)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_j \lambda_k (s^{(2)}_{i+1} + \beta^{(2)}) + (s_{i+1}+\beta)\lambda_k f_i(j) + (s_{i+1}+\beta)\lambda_j f_i(k) +$$
$$+ f_i(i)\lambda_j\lambda_k \left[\frac{2b_i (s_{i+1}+\beta)}{1-\rho_i} + \frac{b^{(2)}_i}{(1-\rho_i)^3} \right] + f_i(i,j)\frac{b_i\lambda_k}{1-\rho_i} +$$
$$+ f_i(i,i)\lambda_j\lambda_k \left(\frac{b_i}{1-\rho_i} \right)^2 + f_i(i,k)\frac{b_i\lambda_j}{1-\rho_i} + f_i(j,k), i \neq j, i \neq k,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(N)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_i \lambda_j (s^{(2)}_{i+1} + \beta^{(2)}) + (s_{i+1}+\beta)\lambda_i f_i(j) + f_i(i)\lambda_i\lambda_j \frac{(s_{i+1}+\beta) b_i}{1-\rho_i}, i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}^{(N)}_{i+1}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} = \lambda_i^2 (s^{(2)}_{i+1} + \beta^{(2)}), i,j,k = \overline{1,N}.$$

Данные соотношения определяют систему линейных алгебраических уравнений для вычисления моментов второго порядка $f_i(j,k)$, $i,j,k = \overline{1,N}$, которые позволяют вычислить среднее время ожидания W_i в очереди Q_i по формуле (см. [8]):

$$\mathbf{W_i} = \frac{\lambda_i b^{(2)}_i}{2(1-\rho_i)} + \frac{f_i(i,i)}{2\lambda_i f_i(i)}, i = \overline{1,N}. \tag{6}$$

3. Заключение

В данной работе продолжено исследование систем поллинга с циклическим адаптивным порядком опроса и проведен анализ системы с исчерпывающей дисциплиной обслуживания очередей. Получены системы линейных алгебраических уравнений для первых и вторых начальных моментов числа заявок в очередях системы в моменты их опроса, что в свою очередь дало возможность получить точные формулы для средних времен ожидания в очередях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-57-00002.

Список литературы

1. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. 2006. № 2. С. 3-56.
2. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007. 309 с.
3. Borst S.C., Boxma O. Polling: past, present, and perspective // TOP. 2018. Vol. 26, No. 3. P. 335-369.
4. Vishnevsky V.M., Dudin A.N., Klimenok V.I., Semenova O.V., Shpilev S. Approximate method to study $M/G/1$-type polling system with adaptive polling mechanism // Quality Technology and Quantitative Management. 2012. Vol. 2. P. 211-228.
5. Semenova O.V., Bui D.T. Method of generating functions for performance characteristic analysis of the polling systems with adaptive polling and gated service // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2018. Vol. 912. P 348-359.
6. Aminev D. A., Kozyrev D. V., Zhurkov A. P., Romanov A. Y., Romanova I. I. Method of automated control of distributed radio direction finding system // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). Omsk, Russia. 2017. P. 1-9.
7. Yechiali U. Analysis and control of polling system // Performance Evaluates of Computer and Communication Systems / Ed. Donatielo L., Nelson R. Springer, 1993. P. 630-650.
8. Takagi H. Analysis of Polling Systems. MIT Press, 1986.