

УДК 519.854

# ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАГРУЗКИ АВИАЦИОННОГО ТРАНСПОРТА

**И.П. Богданов**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*  
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4  
E-mail: [ilyabogdanov@mail.ru](mailto:ilyabogdanov@mail.ru)

**В.А. Нестеров**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4  
E-mail: [al\\_aa@mail.ru](mailto:al_aa@mail.ru)

**В.А. Судаков**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*  
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4  
E-mail: [sudakov@ws-dss.com](mailto:sudakov@ws-dss.com)

**К.И. Сыпало**

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского*  
Россия, 140180, Жуковский, ул. Жуковского, 1  
E-mail: [ksypalo@tsagi.ru](mailto:ksypalo@tsagi.ru)

**Н.Б. Топоров**

*Национальный исследовательский центр «Институт имени Н.Е. Жуковского»*  
Россия, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7  
E-mail: [toporov@nrczh.ru](mailto:toporov@nrczh.ru)

**Ключевые слова:** упаковка трехмерных контейнеров, загрузка транспортных средств, смешанное целочисленное линейное программирование.

**Аннотация:** В докладе рассматривается задача максимизации загрузки совокупности летательных аппаратов, упорядоченных в соответствии с возрастанием приоритета. Предполагается, что грузы и отсеки, в которые осуществляется укладка, являются произвольно заданными кубоидами. Учитываются ограничения на положение центров масс загруженных предметов. Предложена технология поиска точного решения указанной задачи (формализованной как задача смешанного целочисленного линейного программирования), включающая в себя средства многокритериального анализа альтернатив. Описаны основные свойства и практическая значимость разработанной технологии.

## 1. Введение

В своей операционной деятельности логистические предприятия ежедневно сталкиваются с необходимостью определения наилучшего способа расположения товаров внутри трехмерных контейнеров (складов, вагонов, фур и др.). «Наилучший способ расположения» может соответствовать варианту укладки, при котором все имеющиеся грузы размещают в минимально возможном количестве контейнеров, либо при котором в имеющиеся контейнеры загружают совокупность предметов, характеризующуюся

максимальным суммарным объемом (суммарной массой, количеством, полезностью) [1]. При этом на практике необходимо учитывать ограничения, связанные с вместимостью и грузоподъемностью контейнеров, устойчивостью и сбалансированностью размещаемых объектов, очередностью погрузки и разгрузки и др. [2]. Неоптимальное расположение предметов может привести к существенным дополнительным финансовым затратам, увеличению продолжительности и сложности погрузочно-разгрузочных работ, а также повышению рисков повреждения товаров при транспортировке.

Таким образом, возникает класс задач условной оптимизации, называемых в литературе задачами оптимальной упаковки, загрузки либо укладки контейнеров. В настоящем докладе рассмотрена задача размещения грузов на бортах заданной совокупности летательных аппаратов (далее – ЛА), упорядоченных в соответствии с возрастанием приоритета. Требуется максимизировать число объектов на бортах наиболее приоритетных ЛА, а также суммарную массу всех загруженных предметов. Данная задача (в дальнейшем будем называть ее задачей оптимизации загрузки авиационного транспорта или ОЗАТ) формализована в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования (далее – СЦЛП). Предложена технология поиска ее точного решения, реализованная в форме открытого сервиса, доступного в сети Интернет.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим следующий вариант задачи упаковки. Имеется набор грузов, предназначенных для отправки с помощью самолетов либо вертолетов, а также совокупность контейнеров (соответствующих грузовым отсекам ЛА), в которых предполагается осуществлять доставку указанных грузов (будем считать, что в каждом ЛА есть единственный грузовой отсек). Предполагается, что контейнеры и грузы имеют форму кубоидов произвольных размеров. Загрузка отдельных предметов в ЛА осуществляется таким образом, чтобы боковые грани грузов были параллельны стенкам контейнеров. Для простоты считаем, что грузы нельзя поворачивать. Предметы не должны выходить за границы контейнеров, а также занимать один и тот же объем. Для каждого груза задана его масса и габариты (длина, ширина и высота). Для каждого контейнера заданы его грузоподъемность, габариты, а также диапазон, в котором должен находиться центр масс совокупности всех грузов, размещенных в данном контейнере. Кроме того, контейнерам присвоены приоритеты, рассчитанные с помощью комбинированного метода [3]. Содержательно задача ОЗАТ состоит в том, чтобы, с одной стороны, разместить как можно больше предметов в более приоритетных контейнерах, а, с другой стороны, в том, чтобы упаковать в контейнеры грузы с наибольшей суммарной массой.

Введем прямоугольную систему координат: по оси  $x$  будем откладывать длину, по оси  $y$  – ширину, а по оси  $z$  – высоту контейнеров и грузов. Добавим в имеющееся множество контейнеров дополнительный воображаемый контейнер с наименьшим приоритетом. Длина указанного контейнера (в дальнейшем будем его называть виртуальным, а остальные контейнеры – реальными) равна сумме длин всех грузов, ширина равна ширине самого широкого груза, а высота равна высоте самого высокого груза. В виртуальном контейнере окажутся все грузы, которые не получится разместить в реальных контейнерах. Расположим все контейнеры один за другим слева направо вдоль оси  $x$  в порядке увеличения приоритета таким образом, чтобы грани контейнеров были параллельны координатным плоскостям, а левый нижний задний угол каждого контейнера располагался на оси  $x$ . При данном размещении самое левое положение будет занимать виртуальный контейнер, левый нижний задний угол которого будет находиться в начале координат.

Пронумеруем все контейнеры в соответствии с возрастанием приоритета. Введем следующие обозначения:  $g$  – количество контейнеров,  $n$  – количество грузов,  $m_i, l_i, w_i, h_i$  – масса, длина, ширина и высота  $i$ -го груза,  $M_j, L_j, W_j, H_j$  – грузоподъемность, длина, ширина и высота  $j$ -го контейнера,  $X_j^{\min}, X_j^{\max}$  – границы (по оси  $x$ ) диапазона допустимого положения центра масс грузов, размещенных в  $j$ -м контейнере (рассчитанные относительно левого нижнего заднего угла контейнера),  $x_i, y_i, z_i$  – координаты размещения левого нижнего заднего угла  $i$ -го груза,  $r_{ij}$  – индикатор размещения  $i$ -го груза в  $j$ -м контейнере,  $M$  – константа, заведомо большая любых координат,  $L_j^*$  – координата левой грани  $j$ -го контейнера по оси  $x$ .

Формализуем ограничения задачи ОЗАТ в виде линейных уравнений и неравенств. Каждый из грузов должен быть размещен в одном и только одном контейнере:

$$\forall i = 1, \dots, n : \sum_{j=1}^g r_{ij} = 1.$$

Ограничения на грузоподъемность и емкость контейнеров имеют вид:

$$\forall j = 1, \dots, g : \sum_{i=1}^n m_i r_{ij} \leq M_j, \sum_{i=1}^n (l_i \cdot w_i \cdot h_i) r_{ij} \leq L_j \cdot W_j \cdot H_j.$$

Грузы должны находиться внутри контейнеров, т.е.  $\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, g$ :

$$\begin{aligned} x_i + M(1 - r_{ij}) &\geq L_j^*, \quad x_i + l_i - M(1 - r_{ij}) \leq L_j^* + L_j, \\ y_i &\geq 0, \quad y_i + w_i - M(1 - r_{ij}) \leq W_j, \quad z_i \geq 0, \quad z_i + h_i - M(1 - r_{ij}) \leq H_j. \end{aligned}$$

Условия на границы размещения центров масс грузов по оси  $x$  имеют вид:

$$\forall j = 1, \dots, g : (X_j^{\min} + L_j^*) \sum_{v=1}^n m_v r_{vj} \leq \sum_{i=1}^n (m_i (p_{ij}^x + r_{ij} l_i / 2)) \leq (X_j^{\max} + L_j^*) \sum_{v=1}^n m_v r_{vj},$$

где  $p_{ij}^x$  – вспомогательные непрерывные переменные, на которые мы заменяем произведения  $r_{ij} x_i$  путем добавления следующих неравенств:

$$\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, g : p_{ij}^x \leq M r_{ij}, \quad p_{ij}^x \leq x_i, \quad p_{ij}^x \geq x_i - M(1 - r_{ij}), \quad p_{ij}^x \geq 0.$$

Ограничения на пределы расположения центров масс грузов по осям  $y$  и  $z$  формулируются аналогичным образом (с помощью дополнительных переменных  $p_{ij}^y$  и  $p_{ij}^z$ ).

Условия на отсутствие пересечений грузов могут быть записаны с помощью следующей системы неравенств ( $\forall i_1 = 1, \dots, n-1, i_2 = i_1 + 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} x_{i_1} - x_{i_2} - M a_{i_1, i_2} - M b_{i_1, i_2} - M c_{i_1, i_2} &\leq -l_{i_1}, \\ x_{i_2} - x_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - M b_{i_1, i_2} - M c_{i_1, i_2} &\leq -l_{i_2}, \\ y_{i_1} - y_{i_2} - M a_{i_1, i_2} - M(1 - b_{i_1, i_2}) - M c_{i_1, i_2} &\leq -w_{i_1}, \\ y_{i_2} - y_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - M(1 - b_{i_1, i_2}) - M c_{i_1, i_2} &\leq -w_{i_2}, \\ z_{i_1} - z_{i_2} - M a_{i_1, i_2} - M b_{i_1, i_2} - M(1 - c_{i_1, i_2}) &\leq -h_{i_1}, \\ z_{i_2} - z_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - M b_{i_1, i_2} - M(1 - c_{i_1, i_2}) &\leq -h_{i_2}, \\ a_{i_1, i_2} + 2b_{i_1, i_2} + 4c_{i_1, i_2} &\leq 5, \end{aligned}$$

где  $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$  – вспомогательные булевы переменные.

Один из возможных способов записи целевой функции задается выражением (1):

$$(1) \quad \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^g m_i r_{ij} \right),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – заданные числовые коэффициенты.

Таким образом, задача ОЗАТ заключается в поиске максимума функции (1) по непрерывным переменным  $x_i, y_i, z_i, p_{ij}^x, p_{ij}^y, p_{ij}^z$  и булевым переменным  $r_{ij}, a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$  ( $\forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, g, i_1 = 1, \dots, n-1, i_2 = i_1 + 1, \dots, n$ ) при введенных выше ограничениях.

### 3. Предлагаемая технология решения задачи

Построенная формализация задачи ОЗАТ относится к классу задач СЦЛП, для которых существуют точные алгоритмы, гарантирующие нахождение глобального решения (хотя поиск оптимума может требовать значительного времени и ресурсов). В настоящем исследовании для формирования технологии решения задачи ОЗАТ были использованы система веб-сервисов поддержки принятия решений WS-DSS (<http://ws-dss.com>) и оптимизатор SCIP (<https://scip.zib.de>), применяющий для нахождения оптимума алгоритм ветвей и отсечений, метод генерации столбцов, а также ряд эвристических способов поиска допустимых решений, позволяющих сократить пространство перебора [4]. В целях верификации разработанного программного обеспечения были проведены тестовые испытания прототипа расчетной системы на примерах небольшой размерности (не более 10 грузов и не более 5 контейнеров). Сопоставление результатов численного моделирования с осуществленным вручную перебором продемонстрировало общую адекватность результатов работы предложенной технологии. Время поиска решения составило, в среднем, менее 10 секунд (при порядка 1000 линейных ограничений, 100 булевых переменных и 100 непрерывных переменных) на сервере AWS t2.small (1 vCPU, 2 Gb RAM, 20 Gb SSD), т.е. предложенная технология продемонстрировала достаточно высокую скорость расчета.

К явным достоинствам разработанной технологии решения задачи ОЗАТ стоит отнести возможность применения стандартных методов решения задач СЦЛП для поиска ее экстремума. Построенная модель схожа с предложенными в [5,6], но, вследствие использования единого координатного пространства для всех контейнеров, требует вдвое меньше булевых переменных для формализации условий отсутствия пересечений грузов. Также единое координатное пространство позволяет избежать необходимости формировать блоки ограничений, записываемых для каждой пары грузов и каждого контейнера. К явным недостаткам технологии (учитывая NP-трудность задачи [7]) необходимо отнести значительное время и мощные вычислительные ресурсы, которые могут потребоваться для решения (при достаточно большом количестве контейнеров и грузов время, необходимое для поиска оптимума, будет неприемлемым с практической точки зрения). Тем не менее, предложенная технология может быть применена для верификации и калибровки приближенных эвристических подходов к решению задачи ОЗАТ на тестовых примерах малой и средней размерности. Кроме того, на основе предложенной аналитической модели могут быть разработаны методы аппроксимации точного решения задачи ОЗАТ. Например, нижние оценки могут быть рассчитаны с помощью эвристических алгоритмов поиска допустимых точек построенной задачи СЦЛП [4], а верхние оценки могут быть рассчитаны, в частности, путем решения релаксационных задач, полученных удалением ряда ограничений из задачи ОЗАТ.

С точки зрения демонстрации и популяризации результатов проведенных работ предложенную технологию выгодно отличает реализация в форме открытого сервиса,

доступного в сети Интернет. Кроме того, научной новизной настоящего исследования является возможность использования оригинальных комбинированных методов многокритериального анализа альтернатив для выбора предпочтительных ЛА.

## 4. Заключение

В ходе выполнения исследования была разработана и реализована технология решения задачи оптимизации загрузки ЛА при ряде допущений относительно параметров грузов и принципов их размещения (математически формализованной как задача СЦЛП). В построенную технологию были интегрированы комбинированные методы многокритериального анализа альтернатив, применяемые для определения приоритетов загружаемых ЛА. Адекватность работы предложенной технологии была проверена на совокупности тестовых примеров малой размерности.

Направления дальнейших исследований включают в себя модификацию формализации задачи с целью учета пределов допустимого давления на грузы, необходимости обеспечения устойчивости предметов, более сложных форм контейнеров и других ограничений, возникающих на практике. Кроме того, возрастающая сложность рассматриваемых задач потребует разработки дополнительных эвристических подходов, которые бы позволили строить на основе сформированной модели достаточно эффективные варианты загрузки (не обязательно являющиеся глобально оптимальными). В перспективе разрабатываемая технология может стать основой для составной части комплекса, функционал которого будет нацелен на решение более сложных задач, например, подразумевающих формирование расписаний авиаперевозок при ограничениях на количество, характеристики и доступность ЛА, летные условия, сроки доставки и т.д. [8, 9]. Внедрение указанных комплексов позволит снизить затраты на эксплуатацию авиационной техники и инфраструктуры, а также окажет положительное влияние на окружающую среду за счет более эффективного использования воздушного транспорта.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-00-00012 (18-00-00011) КОМФИ.

## Список литературы

1. Bortfeldt A., Wäscher G. Constraints in container loading – A state-of-the-art review // *European Journal of Operational Research*. 2013. Vol. 229, No. 1. P. 1-20.
2. Bischoff E.E., Ratcliff M.S.W. Issues in the development of approaches to container loading // *Omega, The International Journal of Management Science*. 1995. Vol. 23, No. 4. P. 377-390.
3. Осипов В.П., Судаков В.А. Комбинированный метод поддержки принятия многокритериальных решений // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2015. № 30. 21 с.
4. Achterberg T. SCIP: solving constraint integer programs // *Mathematical Programming Computation*. 2009. Vol. 1, No. 1. P. 1-41.
5. Chen C.S., Lee S.M., Shen Q.S. An analytical model for the container loading problem // *European Journal of Operational Research*. 1995. Vol. 80, No. 1. P. 68-76.
6. Hong Ha H.T., Nananukul N. Air cargo loading management system for logistics forwarders // *Proceedings of 2016 International Conference on Urban Planning, Transport and Construction Engineering (ICUPTCE'16)*. Pattaya, Jan. 2-3, 2016. P. 51-58.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
8. Бахтин В.А., Богданов И.П., Осипов В.П., Рыков Ю.Г., Смирнов А.А., Судаков В.А. Оптимизация перевозок однородной продукции между оптовыми складами // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 65. 26 с. doi:10.20948/prepr-2018-65.
9. Pollaris H., Braekers K., Caris A., Janssens G.K., Limbourg S. Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions // *OR Spectrum*. 2015. Vol. 37, No. 2. P. 297-330.